

座標系の回転および、ベクトルの回転と座標変換の例題

目 次

1 座標系	2
2 座標系の軸ベクトル	6
3 ベクトル	7
4 回転マトリクスの縮退	8
5 例題の結果	8
6 まとめ	24
6.1 座標系の回転	24
6.2 ベクトルの回転	24
6.3 ベクトルの座標変換	24

図 表 目 次

図1-1 例題の座標系	2
表5-1 座標系の回転	9
表5-2 ベクトルの回転	13
表5-3 ベクトルの座標変換	19

下記の4種類の体(非可換体)について演算結果を比較検討する。

$$(1) \mathbf{D}_R^I = (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I) = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k : \text{方向余弦マトリクス}$$

$$(2) (\mathbf{D}_G^R)^I = \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = (\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I) \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I)^T : \text{固定角型回転マトリクス}$$

$$(3) \mathbf{Q}_R^I = \mathbf{Q}(\theta_1, \underline{e}_i) \otimes \mathbf{Q}(\theta_2, \underline{e}_j) \otimes \mathbf{Q}(\theta_3, \underline{e}_k) : \text{オイラー角型四元数}$$

$$(4) (\mathbf{Q}_G^R)^I = \mathbf{Q}_G^I \otimes \mathbf{Q}_R^{I*} : \text{固定角型四元数}$$

演算内容は下記の3種類。

- (1) 座標系の回転
- (2) ベクトルの回転
- (3) ベクトルの座標変換

1 座標系

基準とする慣性座標系I(o-x, y, z)の軸単位ベクトルを $(\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z})$ とし、慣性座標系Iを回転してできた局地座標系L(o-x_L, y_L, z_L)の軸単位ベクトルを慣性座標系Iで表して $(\underline{x}_L^I \ \underline{y}_L^I \ \underline{z}_L^I)$ とする。さらに、局地座標系Lを基準として2つの座標系を作り、それぞれ座標系B(o-x_B, y_B, z_B)および座標系A(o-x_A, y_A, z_A)とし、それぞれの軸単位ベクトルを座標系Lで表して $(\underline{x}_B^L \ \underline{y}_B^L \ \underline{z}_B^L)$ および $(\underline{x}_A^L \ \underline{y}_A^L \ \underline{z}_A^L)$ とする。また、これらは慣性座標系Iでは $(\underline{x}_B^I \ \underline{y}_B^I \ \underline{z}_B^I)$ および $(\underline{x}_A^I \ \underline{y}_A^I \ \underline{z}_A^I)$ と表す。

慣性座標系Iは地球中心に原点を置き、グリニッジ子午線と赤道面の交点方向に x 軸、自転軸方向に z 軸、それらと右手系を成す方向に y 軸を定義する。

局地座標系Lは慣性座標系Iの第3軸周りに東経 λ だけ回転し、新しくできた第2軸周りに緯度 ϕ の負符号の回転、さらに新しくできた第1軸周りに北から時計回りに測った方位角 μ の回転を施した座標系とする。これにより x_L 軸は局所鉛直方向、y_L 軸と z_L 軸は局所水平面にあり、z_L 軸が方位角方向を向く。

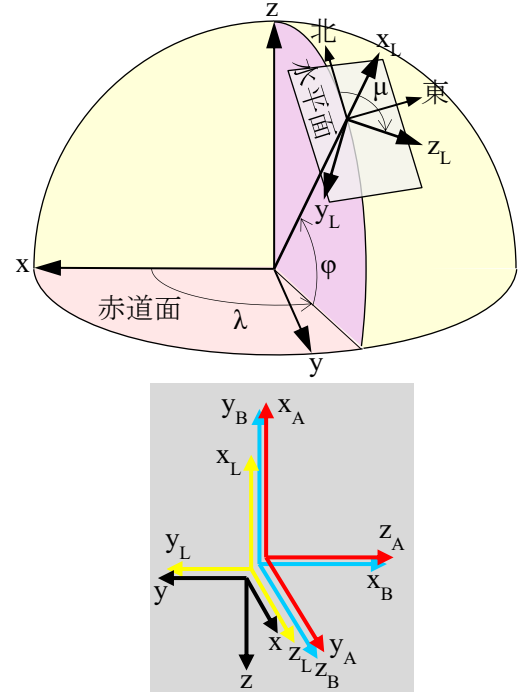


図1-1 例題の座標系

$$(\underline{x}_L^I \ \underline{y}_L^I \ \underline{z}_L^I) = (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z}) \cdot [\lambda]_3 \cdot [-\phi]_2 \cdot [-\mu]_1 = (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z}) \cdot \mathbf{D}_L^I : \text{座標系L}$$

ここで、 $\lambda = 90^\circ$, $\phi = -90^\circ$, $\mu = -90^\circ$ とする。また、 $(\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z})$ は単位マトリクスである。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_L^I &= [90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_2 \cdot [90^\circ]_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの方向余弦マトリクス} \\ \underline{x}_L^I &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{y}_L^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_L^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの軸ベクトル} \end{aligned}$$

座標系Iから座標系Lへの回転を表す四元数はオイラー角による回転順に合成して、次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{L1} &= \cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}_3 = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{Q}_{L2} &= \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \mathbf{e}_2 = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{Q}_{L3} &= \cos \frac{-\mu}{2} + \sin \frac{-\mu}{2} \mathbf{e}_1 = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{Q}_L^I &= \mathbf{Q}_{L1} \otimes \mathbf{Q}_{L2} \otimes \mathbf{Q}_{L3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから座標系Lへの回転を表す四元数}
\end{aligned}$$

座標系Bは座標系Lの第2軸周りに θ_1 回転し、新しくできた第3軸周りに θ_2 回転し、さらに新しくできた第1軸周りに θ_3 回転した座標系とする。

$$(\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) \cdot [\theta_1]_2 \cdot [\theta_2]_3 \cdot [\theta_3]_1 = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) \cdot \mathbf{D}_B^L : \text{座標系B}$$

ここで、 $\theta_1 = -90^\circ$, $\theta_2 = -90^\circ$, $\theta_3 = -90^\circ$ とする。また、 $(\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L)$ は単位マトリクスである。

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_B^L &= [-90^\circ]_2 \cdot [-90^\circ]_3 \cdot [-90^\circ]_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bの方向余弦マトリクス}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_B^I &= \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクス}
\end{aligned}$$

$$\underline{x}_B^L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y}_B^L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_B^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bの軸ベクトル}$$

$$\underline{x}_B^I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y}_B^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{z}_B^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Bの軸ベクトル}$$

座標系Lから座標系Bへの回転を表す四元数はオイラー角による回転順に合成して、次のように表される。

$$\mathbf{Q}_{B1} = \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_2 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{B2} = \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_3 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{B3} = \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_3}{2} \underline{e}_1 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_B^L &= \mathbf{Q}_{B1} \otimes \mathbf{Q}_{B2} \otimes \mathbf{Q}_{B3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Lから座標系Bへの回転を表す四元数}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_B^I = \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{Q}_B^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから座標系Bへの回転を表す四元数}$$

座標系Aは座標系Lの第3軸周りに φ_1 回転し、新しくできた第1軸周りに φ_2 回転し、さらに新しくできた第3軸周りに φ_3 回転した座標系とする。

$$(\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) \cdot [\varphi_1]_3 \cdot [\varphi_2]_1 \cdot [\varphi_3]_3 = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) \cdot \mathbf{D}_A^L : \text{座標系A}$$

ここで、 $\varphi_1 = 180^\circ$, $\varphi_2 = -90^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$ とする。また、 $(\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L)$ は単位マトリクスである。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^L &= [180^\circ]_3 \cdot [-90^\circ]_1 \cdot [180^\circ]_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Aの方向余弦マトリクス} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^I &= \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Aの方向余弦マトリクス} \end{aligned}$$

$$\underline{x}_A^L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y}_A^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{z}_A^L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Aの軸ベクトル}$$

$$\underline{x}_A^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{y}_A^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_A^I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Aの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{Q}_{A1} = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{e}_3 = \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{A2} = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{A3} = \cos \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_3}{2} \mathbf{e}_3 = \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_A^L &= \mathbf{Q}_{A1} \otimes \mathbf{Q}_{A2} \otimes \mathbf{Q}_{A3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Lから座標Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_A^I &= \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{Q}_A^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから座標Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

次に座標系Bと座標系Aの関係を示す。

$$(\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) = (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) \cdot \mathbf{D}_A^B : \text{オイラー角による座標系の回転}$$

$$\mathbf{D}_A^B = \mathbf{D}_B^L{}^T \cdot \mathbf{D}_A^L$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Bから見た座標系Aの方向余弦マトリクス} \\
\mathbf{Q}_A^B &= \mathbf{Q}_B^{L*} \otimes \mathbf{Q}_A^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Bから座標系Aへの回転を表す四元数}
\end{aligned}$$

この四元数を方向余弦マトリクスに変換してみると下記のようになる。

$$\mathbf{D}_A^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

固定角型回転マトリクスは基準座標系が等しい2つの方向余弦マトリクスを合成したものだから、その基準座標系が固定角型回転マトリクスの基準座標系となり、カッコの外に右上添え字として基準座標系を表示して次のように定義する。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_L^L)^I &= (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I) \cdot (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I)^T = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT} = \mathbf{D}_L^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{D}_B^B)^I &= (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) \cdot (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I)^T = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{D}_A^A)^I &= (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \cdot (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{D}_B^L)^I &= (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) \cdot (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I)^T = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT} = \mathbf{D}_B^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{D}_A^L)^I &= (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \cdot (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT} = \mathbf{D}_A^I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{D}_A^B)^I &= (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \cdot (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{D}_A^B)^L &= (\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) \cdot (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L)^T = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^{LT} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bから座標系Aへの回転マトリクス}
\end{aligned}$$

この固定角型回転マトリクスは、基準座標系(カッコの右上添え字)において、カッコ内右上添え字の座標系から右下添え字の座標系への回転を表している。以下の固定角型四元数も同様である。

$$(\mathbf{Q}_L^I)^I = \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{Q}_I^{I*} = \mathbf{Q}_L^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_B^I)^I &= \mathbf{Q}_B^I \otimes \mathbf{Q}_L^{I*} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_A^I)^I &= \mathbf{Q}_A^I \otimes \mathbf{Q}_L^{I*} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{Q}_B^I)^I = \mathbf{Q}_B^I \otimes \mathbf{Q}_I^{I*} = \mathbf{Q}_B^I = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(\mathbf{Q}_A^I)^I = \mathbf{Q}_A^I \otimes \mathbf{Q}_I^{I*} = \mathbf{Q}_A^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_A^B)^I &= \mathbf{Q}_A^I \otimes \mathbf{Q}_B^{I*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)^* = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{2} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \right\} = \frac{1}{4} \left\{ -2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから見た座標系Bから座標系Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_A^B)^L &= \mathbf{Q}_A^L \otimes \mathbf{Q}_B^{L*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Lから見た座標系Bから座標系Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

この四元数を回転マトリクスに変換してみると下記のようになる。

$$(\mathbf{D}_A^B)^L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 座標系の軸ベクトル

座標系の軸ベクトルは方向余弦マトリクスの列要素で表される。

$\mathbf{D}_L^I = (\mathbf{x}_L^I \quad \mathbf{y}_L^I \quad \mathbf{z}_L^I)$: 座標系Iから見た座標系Lの方向余弦マトリクス

ここでは方向余弦マトリクスと区別して軸ベクトルを次のように表すこととする。

$\mathbf{x}_I^I \equiv \mathbf{D}_I^I = (\mathbf{x}_I^I \quad \mathbf{y}_I^I \quad \mathbf{z}_I^I) = [\mathbf{1}]$: 座標系Iから見た座標系Iの軸ベクトル

$$\mathbf{x}_L^L \equiv \mathbf{D}_L^L = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Lから見た座標系Lの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_L^I \equiv \mathbf{D}_L^I = (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_B^I \equiv \mathbf{D}_B^I = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Bの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_B^L \equiv \mathbf{D}_B^L = (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_A^I \equiv \mathbf{D}_A^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Aの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_A^L \equiv \mathbf{D}_A^L = (\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Aの軸ベクトル}$$

3 ベクトル

ここでは回転や座標変換の結果を分かり易くするため各座標軸方向のベクトルのみを用い、演算例を増やしても記述がコンパクトになるよう、演算対象のベクトルを3つまとめて次のように表す。

$$\mathbf{a}_I^I \equiv \mathbf{x}_I^I = (\underline{x}_I^I \quad \underline{y}_I^I \quad \underline{z}_I^I) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Iから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_L^L \equiv \mathbf{x}_L^L = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Lから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_L^I \equiv \mathbf{x}_L^I = (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_B^I \equiv \mathbf{x}_B^I = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Bの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_B^L \equiv \mathbf{x}_B^L = (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_A^I \equiv \mathbf{x}_A^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Aの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_A^L \equiv \mathbf{x}_A^L = (\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Aの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_I^L \equiv \mathbf{x}_I^L = \mathbf{D}_L^I{}^T \cdot \mathbf{a}_I^I = (\underline{x}_I^L \quad \underline{y}_I^L \quad \underline{z}_I^L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_I^B \equiv \mathbf{x}_I^B = \mathbf{D}_B^I{}^T \cdot \mathbf{a}_I^I = (\underline{x}_I^B \quad \underline{y}_I^B \quad \underline{z}_I^B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Bから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

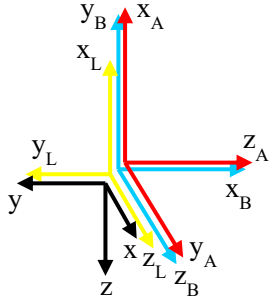
$$\mathbf{a}_L^B \equiv \mathbf{x}_L^B = \mathbf{D}_B^L{}^T \cdot \mathbf{a}_L^L = (\underline{x}_L^B \quad \underline{y}_L^B \quad \underline{z}_L^B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Bから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_I^A \equiv \mathbf{x}_I^A = \mathbf{D}_A^I{}^T \cdot \mathbf{a}_I^I = (\underline{x}_I^A \quad \underline{y}_I^A \quad \underline{z}_I^A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Aから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_L^A \equiv \mathbf{x}_L^A = \mathbf{D}_A^L{}^T \cdot \mathbf{a}_L^L = (\underline{x}_L^A \quad \underline{y}_L^A \quad \underline{z}_L^A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Aから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

4 回転マトリクスの縮退

回転を目視で容易に確認できるよう、回転マトリクスの縮退形を下記に示す。

$\mathbf{D}_L^I = [90^\circ]_2$ $\mathbf{D}_B^I = [-90^\circ]_3$ $\mathbf{D}_A^L = [90^\circ]_1$ $\mathbf{D}_B^I = [90^\circ]_2 \cdot [-90^\circ]_3$ $\mathbf{D}_A^I = [90^\circ]_2 \cdot [90^\circ]_1$ $\mathbf{D}_A^B = [90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_1$	$(\mathbf{D}_L^I)^I = \mathbf{D}_L^I$ $(\mathbf{D}_B^I)^I = [-90^\circ]_1$ $(\mathbf{D}_A^L)^I = [-90^\circ]_3$ $(\mathbf{D}_B^I)^I = \mathbf{D}_B^I$ $(\mathbf{D}_A^I)^I = \mathbf{D}_A^I$ $(\mathbf{D}_A^B)^I = [-90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_1$	$(\mathbf{D}_B^L)^L = \mathbf{D}_B^L = [-90^\circ]_3$ $(\mathbf{D}_A^L)^L = \mathbf{D}_A^L = [90^\circ]_1$ $(\mathbf{D}_B^I)^L = [90^\circ]_2 \cdot [90^\circ]_1$ $(\mathbf{D}_A^I)^L = [90^\circ]_1 \cdot [90^\circ]_2$ $(\mathbf{D}_A^B)^L = [90^\circ]_1 \cdot [90^\circ]_3$	
---	--	---	---

5 例題の結果

下記の4種類の体(非可換体)をまとめて、

- ・方向余弦マトリクス
- ・固定角型回転マトリクス
- ・オイラー角型四元数
- ・固定角型四元数

結果を下記に示す。

表5-1 座標系の回転

表5-2 ベクトルの回転

表5-3 ベクトルの座標変換

なお、体(非可換体)やベクトルを表現する基準の座標系(基準座標系)は、各体(非可換体)やベクトルにおいて、下記の部分で表す。

$\mathbf{D}_B^I$ 、 $\mathbf{Q}_B^I$: 右上添え字の“I”

$(\mathbf{D}_A^B)^I$ 、 $(\mathbf{Q}_A^B)^I$: カッコ外の右上添え字の“I”

$\mathbf{x}_B^I$ 、 $\mathbf{a}_B^I$: 右上添え字の“I”

表5-1 座標系の回転

No.	方向余弦マトリクスによる回転			固定角型回転マトリクスによる回転		
1	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_L^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I$	◎
2	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^I$	◎	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I$	◎
3	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{D}_B^{L^T}$	◎	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L$	×
4	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^I$	◎	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I$	◎
5	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{D}_A^{L^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L$	×
6	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_B^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I$	◎
7	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_A^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I$	◎
8	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_A^B$	◎	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{B^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{x}_B^I$	◎
9	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{D}_A^B$	◎	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{D}_A^{B^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^B)^L \cdot \mathbf{x}_B^L$	◎
No.	オイラー角型四元数による回転			固定角型四元数による回転		
21	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_L^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_L^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^{I*}$	◎
22	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	×	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	◎
23	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L$	◎	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*}$	×
24	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	×	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	◎
25	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	◎	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{Q}_A^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^{I*}$	×
26	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	◎
27	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	◎
28	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	×	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^B$	×	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^B)^I \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{I*}$	◎
29	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	×	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^B$	×	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{Q}_A^B)^L \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{L*}$	◎

座標系の回転はオイラー角による方向余弦マトリクスを用いて行うのが一般的である。座標系を表す3軸ベクトルをまとめたものが方向余弦マトリクスであり、軸ベクトルは基準の座標系から見た縦ベクトルで表される。座標系の回転は2つの方向余弦マトリクスの積で表され、方向余弦マトリクスの合成の規則に従う。

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} : \text{基準の座標系Rから見た座標系Aの3軸ベクトル}$$

$$\mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_G^A = \mathbf{D}_G^R, \quad \mathbf{D}_G^{A^T} = \mathbf{D}_A^G, \quad \mathbf{D}_G^G = \mathbf{1}$$

方向余弦マトリクスによる座標系の回転は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_G^R & \underline{y}_G^R & \underline{z}_G^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_G^A, \quad \mathbf{x}_G^R = \mathbf{x}_A^R \cdot \mathbf{D}_G^A : \text{座標系の回転}$$

方向余弦マトリクス以外の体(非可換体)も利用できるが、それらを表現する基準の座標系と演算対象の座標軸ベクトルを表現する基準の座標系は一致している必要がある。

(1) 方向余弦マトリクスによる座標系の回転

$$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_L^I = \mathbf{x}_L^I$$

$$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I$$

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_A^I &= \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I \\
\mathbf{x}_A^L &= \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L \\
\mathbf{x}_B^I &= \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I \\
\mathbf{x}_A^I &= \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_A^I = \mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_A^I = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I \\
\mathbf{x}_A^I &= \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_A^B = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_A^B = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I \\
\mathbf{x}_A^L &= \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{D}_A^B = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_A^B = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L \\
\mathbf{x}_I^I &= \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^L = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^L = \mathbf{D}_I^I = \mathbf{x}_I^I \\
\mathbf{x}_L^I &= \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^B = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^B = \mathbf{D}_L^I = \mathbf{x}_L^I \\
\mathbf{x}_L^L &= \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^B = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^B = \mathbf{D}_L^L = \mathbf{x}_L^L \\
\mathbf{x}_L^I &= \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^A = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^A = \mathbf{D}_L^I = \mathbf{x}_L^I \\
\mathbf{x}_L^L &= \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{D}_L^A = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_L^A = \mathbf{D}_L^L = \mathbf{x}_L^L \\
\mathbf{x}_I^I &= \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_I^I = \mathbf{x}_I^I \\
\mathbf{x}_I^L &= \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^A = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^A = \mathbf{D}_I^L = \mathbf{x}_I^L \\
\mathbf{x}_B^I &= \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^A = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^A = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I \\
\mathbf{x}_B^L &= \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^A = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^A = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L
\end{aligned}$$

(2) 固定角型回転マトリクスによる座標系の回転

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_L^I &= (\mathbf{D}_L^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT}) \cdot \mathbf{D}_I^I = \mathbf{D}_L^I = \mathbf{x}_L^I \\
\mathbf{x}_B^I &= (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT}) \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I \\
\mathbf{x}_A^I &= (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT}) \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I \\
\mathbf{x}_B^I &= (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT}) \cdot \mathbf{D}_I^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I \\
\mathbf{x}_A^I &= (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT}) \cdot \mathbf{D}_I^I = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I \\
\mathbf{x}_A^I &= (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT}) \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I \\
\mathbf{x}_A^L &= (\mathbf{D}_A^B)^L \cdot \mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^{LT}) \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L \\
\mathbf{x}_I^I &= (\mathbf{D}_L^I)^{IT} \cdot \mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT})^T \cdot \mathbf{D}_L^I = (\mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT}) \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_I^I = \mathbf{x}_I^I \\
\mathbf{x}_L^I &= (\mathbf{D}_B^I)^{IT} \cdot \mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT})^T \cdot \mathbf{D}_B^I = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT}) \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_L^I = \mathbf{x}_L^I \\
\mathbf{x}_L^I &= (\mathbf{D}_A^I)^{IT} \cdot \mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT})^T \cdot \mathbf{D}_A^I = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^{IT}) \cdot \mathbf{D}_A^I = \mathbf{D}_L^I = \mathbf{x}_L^I \\
\mathbf{x}_I^I &= (\mathbf{D}_B^I)^{IT} \cdot \mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT})^T \cdot \mathbf{D}_B^I = (\mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT}) \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_I^I = \mathbf{x}_I^I \\
\mathbf{x}_I^I &= (\mathbf{D}_A^I)^{IT} \cdot \mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT})^T \cdot \mathbf{D}_A^I = (\mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_A^{IT}) \cdot \mathbf{D}_A^I = \mathbf{D}_I^I = \mathbf{x}_I^I \\
\mathbf{x}_B^I &= (\mathbf{D}_A^B)^{IT} \cdot \mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT})^T \cdot \mathbf{D}_A^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_A^{IT}) \cdot \mathbf{D}_A^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I \\
\mathbf{x}_B^L &= (\mathbf{D}_A^B)^L \cdot \mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^{LT})^T \cdot \mathbf{D}_A^L = (\mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_A^{LT}) \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L
\end{aligned}$$

基準の座標系が一致していないので変換できない例。

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_B^I &= (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^L = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT}) \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^L \\
\mathbf{x}_A^I &= (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^L = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT}) \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^L \\
\mathbf{x}_L^L &= (\mathbf{D}_B^L)^{IT} \cdot \mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_I^{LT})^T \cdot \mathbf{D}_B^L = (\mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^{LT}) \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_I^B \cdot \mathbf{D}_B^L \\
\mathbf{x}_L^L &= (\mathbf{D}_A^L)^{IT} \cdot \mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_I^{LT})^T \cdot \mathbf{D}_A^L = (\mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^{LT}) \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_I^A \cdot \mathbf{D}_A^L
\end{aligned}$$

(3) オイラー角型四元数による座標系の回転

式(3.4-10)に示した四元数によるベクトルの回転は、式(3.4-13)に示した方向余弦マトリクスによるベクトルの回転に置き換えることができ、次のように表される。

$$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*} = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^L = \mathbf{a}_B^L : \text{ベクトルの回転 (基準座標系が一致している必要がある)}$$

$$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{a}_B^L = \mathbf{a}_L^L : \text{ベクトルの回転 (基準座標系が一致している必要がある)}$$

この表記を用いて説明する。なお、3つのベクトル群 $\mathbf{x}_L^L = (\underline{x}_B^L \ \underline{y}_B^L \ \underline{z}_B^L)$ を四元数で一気に変換する表現は正しくないが、便宜上、座標系3軸の回転をこのように表現した。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L^L &= \mathbf{Q}_L^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{L*} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_L^L \cdot \underline{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{L*} & \mathbf{Q}_L^L \cdot \underline{y}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{L*} & \mathbf{Q}_L^L \cdot \underline{z}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{L*} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{D}_L^L \cdot \underline{x}_L^L \ \mathbf{D}_L^L \cdot \underline{y}_L^L \ \mathbf{D}_L^L \cdot \underline{z}_L^L) = (\underline{x}_L^L \ \underline{y}_L^L \ \underline{z}_L^L) = \mathbf{x}_L^L \end{aligned}$$

以下、省略形で表す。

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*} = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L$$

$$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*} = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L$$

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*} = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L$$

$$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*} = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L$$

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*} = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L$$

$$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*} = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_L^{L*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^L = \mathbf{D}_L^{L^T} \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_L^L = \mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_L^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{x}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_L^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L = \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{x}_A^L = \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L = \mathbf{x}_L^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{x}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_L^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L = \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{x}_A^L = \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_A^L = \mathbf{x}_A^L = \mathbf{x}_L^L$$

基準の座標系が一致していないので変換できない例。

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*} = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^L$$

$$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*} = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_L^L$$

$$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_A^{B*} = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^L = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{D}_B^L$$

$$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_A^{B*} = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^L = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{D}_B^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{x}_B^L = \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{D}_B^L$$

$$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L = \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{x}_A^L = \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{D}_A^L$$

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^B = \mathbf{D}_A^{B^T} \cdot \mathbf{x}_A^L = \mathbf{D}_A^{B^T} \cdot \mathbf{D}_A^L$$

$$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^B = \mathbf{D}_A^{B^T} \cdot \mathbf{x}_A^L = \mathbf{D}_A^{B^T} \cdot \mathbf{D}_A^L$$

(4) 固定角型四元数による座標系の回転

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L^L &= (\mathbf{Q}_L^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_L^L)^{I*} = \mathbf{Q}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{I*})^* = \mathbf{Q}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^{I*} \\ &= \mathbf{Q}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^L) \cdot \mathbf{Q}_L^{I*} = \mathbf{D}_L^L \cdot (\mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{x}_L^L) = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_L^L = \mathbf{x}_L^L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B^L &= (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*} = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^{I*})^* = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} \\ &= \mathbf{Q}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^L) \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} = \mathbf{D}_B^L \cdot (\mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{x}_L^L) = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{x}_L^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{D}_L^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L \end{aligned}$$

