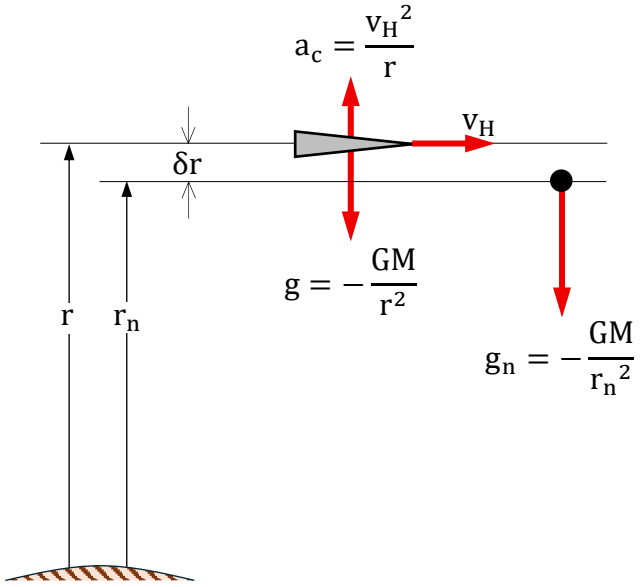
航法計算における高度の発散

試験のために慣性計測装置（IMU）を航空機に搭載して航法計算を行うと、軌道半径が指数関数的に発散するという現象が現れる。このメカニズムを下記に示す。



1 重力効果のみによる説明

航空機にはエンジンによる推力、空気力および重力が作用する。このうち、重力による加速度は次のように表される。

$$g = -\frac{GM}{r^2} \quad :\text{航空機に作用する重力による加速度 } [m/s^2] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$GM = 3.986005 \times 10^{14}\ [Nm^2/kg]$:地球重力定数

r :航空機の軌道半径 [m]

航法計算は、慣性計測装置（ジャイロおよび加速度計で構成された IMU）で測った推力や空気力による加速度を積分した速度に、下式のように航法計算結果の位置データ（軌道半径）を用いて重力加速度を計算し、それを積分して加えて飛行体の全体速度を求める。

$$g_n = -\frac{GM}{{r_n}^2} \quad :\text{航法計算における重力加速度 } [m/s^2] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$r_n = r - \delta r$:航法計算における軌道半径 [m]

δr :真の軌道半径に対する航法計算における軌道半径の誤差 [m]

上の式において、${}^{1}/_{(1-\varepsilon)} \fallingdotseq (1+\varepsilon)$ と近似し、さらに高次の微小項を省略すると、

$$g_n = -\frac{GM}{{r_n}^2} = -\frac{GM}{(r-\delta r)^2} = -\frac{GM}{r^2\left\{1-\left(\frac{\delta r}{r}\right)\right\}^2} = -\frac{GM}{r^2}\left\{1+\left(\frac{\delta r}{r}\right)\right\}^2 \fallingdotseq -\frac{GM}{r^2}\left(1+2\frac{\delta r}{r}\right)$$

よって、航法計算における重力加速度は次のように表される。

$g_n = \left(1 + 2\frac{\delta r}{r}\right) g$:航法計算における重力加速度 ……(3)

このように、軌道半径が小さいと下向きの重力加速度が大きくなるから、ますます航法計算において軌道半径を低下させることになる。

2 運動方程式に基づく説明

この現象を非慣性系から見た運動方程式を用いて導出する。半径方向には重力と遠心力が作用し、運動方程式が次のように表される。

$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + m\frac{{v_H}^2}{r}$:半径方向の運動方程式 ……(4)

$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{{v_H}^2}{r}$:半径方向加速度 ……(5)

m :質量

v_H :水平速度 [m/s]

上の式(5)の両辺を半径について変分をとって、

$\delta\ddot{r} = \left(2\frac{GM}{r^3} - \frac{{v_H}^2}{r^2}\right)\delta r$:半径の微小変動に対する半径方向加速度の変動

$\delta\ddot{r} - \left(2\frac{GM}{r^3} - \frac{{v_H}^2}{r^2}\right)\delta r = 0$:微小変動の微分方程式 ……(6)

上の微分方程式(6)の解を下記のように仮定して微分し、

$\delta r = Ce^{at}$:微分方程式の仮の解……(7)

$\delta\dot{r} = aCe^{at}$

$\delta\ddot{r} = a^2Ce^{at}$

これらを微分方程式(6)に代入して、

$a^2Ce^{at} - \left(2\frac{GM}{r^3} - \frac{{v_H}^2}{r^2}\right)Ce^{at} = 0$

$a^2 - \left(2\frac{GM}{r^3} - \frac{{v_H}^2}{r^2}\right) = 0$:特性方程式 ……(8)

この特性方程式の解は次のように表される。

$a = \pm\frac{1}{r}\sqrt{2\frac{GM}{r} - {v_H}^2}$:特性方程式の解 ……(9)

2.1 判別式が $2\frac{GM}{r} - {v_H}^2 > 0$ のとき

($v_H < \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM}{r}}$、水平速度$v_H$が円軌道速度$\sqrt{\frac{GM}{r}}$の$\sqrt{2}$倍未満の場合)

$$a_1 = \frac{1}{r}\sqrt{2\frac{GM}{r} - {v_H}^2} = b$$

$$a_2 = -\frac{1}{r}\sqrt{2\frac{GM}{r} - {v_H}^2} = -b$$

$$\delta r = Ce^{a_1 t} + Ce^{a_2 t} = C\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)$$

これに t=0 の初期条件を代入して、

$$\delta r_0 = Ce^{0} + Ce^{-0} = 2C$$

$$C = \frac{1}{2}\delta r_0$$

$$\delta r = \frac{1}{2}\delta r_0\left(e^{bt} + e^{-bt}\right)$$

$$\delta r = \frac{1}{2}\delta r_0\left\{e^{\left(\frac{1}{r}\sqrt{2\frac{GM}{r}-{v_H}^2}\right)t} + e^{-\left(\frac{1}{r}\sqrt{2\frac{GM}{r}-{v_H}^2}\right)t}\right\} \cdots\cdots (10)$$

2.2 判別式が $2\frac{GM}{r} - {v_H}^2 = 0$ のとき

（$v_H = \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM}{r}}$、水平速度$v_H$が円軌道速度$\sqrt{\frac{GM}{r}}$の$\sqrt{2}$倍に等しい場合）

$$a = \pm\frac{1}{r}\sqrt{2\frac{GM}{r} - {v_H}^2} = 0$$

$$\delta r = Ce^{at} = Ce^{0t} = C$$

これに t=0 の初期条件を代入して、

$$\delta r_0 = C$$

$$C = \delta r_0$$

$$\delta r = \delta r_0 \cdots\cdots (11)$$

2.3 判別式が $2\frac{GM}{r} - {v_H}^2 < 0$ のとき

（$v_H > \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM}{r}}$、水平速度$v_H$が円軌道速度$\sqrt{\frac{GM}{r}}$の$\sqrt{2}$倍を超える場合）

$$a_1 = i\frac{1}{r}\sqrt{{v_H}^2 - 2\frac{GM}{r}} = ib$$

$$a_2 = -i\frac{1}{r}\sqrt{{v_H}^2 - 2\frac{GM}{r}} = -ib$$

$$\delta r = Ce^{a_1 t} + Ce^{a_2 t} = C\left(e^{ibt} + e^{-ibt}\right)$$

$$\delta r = C(\cos bt + i\sin bt + \cos bt - i\sin bt) = 2C\cos bt = 2C\cos\left\{\frac{1}{r}\left(\sqrt{{v_H}^2 - 2\frac{GM}{r}}\right)t\right\}$$

これに t=0 の初期条件を代入して、

$$\delta r_0 = 2C\cos(0) = 2C$$

$$C = \frac{1}{2}\delta r_0$$

$$\delta r = \delta r_0 \cos\left\{\frac{1}{r}\left(\sqrt{{v_H}^2 - 2\frac{GM}{r}}\right)t\right\} \cdots\cdots (12)$$

3 計算例

飛行体は水平速度一定、鉛直速度ゼロで運動しているものとする。従って、軌道半径は常に一定である。この状況で航法計算結果がどのようになるかを解析する。

航法計算を模擬した式は下記に示した通りで、実際の航法計算の式とは異なる。

$a_G = -\frac{GM}{r^2} + \frac{{v_H}^2}{r}$:重力加速度＋遠心加速度

$a_L = \frac{GM}{{r_0}^2} - \frac{{v_H}^2}{r_0}$:IMU 計測値（軌道半径方向加速度）

$a = a_L + a_G$

$v = v_0 + \int a\,dt$ ：鉛直速度 $\cdots\cdots (13)$

$r = r_0 + \int v\,dt$ ：軌道半径 $\cdots\cdots (14)$

$v_0 = 0$ [m/s] :初期鉛直速度（飛行体鉛直速度）

$r_0 = 7{,}000{,}000$ [m] :初期軌道半径（飛行体軌道半径）

$$v_H = \left\{\begin{array}{ll} 0.1\sqrt{2\frac{GM}{r_0}} & :v_H < \sqrt{2\frac{GM}{r_0}} \quad \text{円軌道速度の}\sqrt{2}\text{倍未満} \\ \sqrt{2\frac{GM}{r_0}} & :v_H = \sqrt{2\frac{GM}{r_0}} \quad \text{円軌道速度に等しい} \\ 20\sqrt{2\frac{GM}{r_0}} & :v_H > \sqrt{2\frac{GM}{r_0}} \quad \text{円軌道速度の}\sqrt{2}\text{倍を超過} \end{array}\right\} \text{:水平速度[m/s]}$$

$$\delta r_0 = \left\{\begin{array}{l} 1[\mathrm{m}] \\ 20[\mathrm{m}] \end{array}\right\} \text{:軌道半径の航法誤差初期値}$$

上記2項で導出した軌道半径誤差の解析式における水平速度3ケースと、航法計算における軌道半径誤差2ケースを組み合わせた6ケースについて解析する。

(1) r_{1_1} ： $v_H = 0.1\sqrt{2\frac{GM}{r_0}}$、$\delta r_0 =$ 1[m]

(2) r_{1_2} ： $v_H = 0.1\sqrt{2\frac{GM}{r_0}}$、$\delta r_0 = 20$[m]

(3) r_{2_1} ： $v_H = \sqrt{2\frac{GM}{r_0}}$、 $\delta r_0 =$ 1[m]

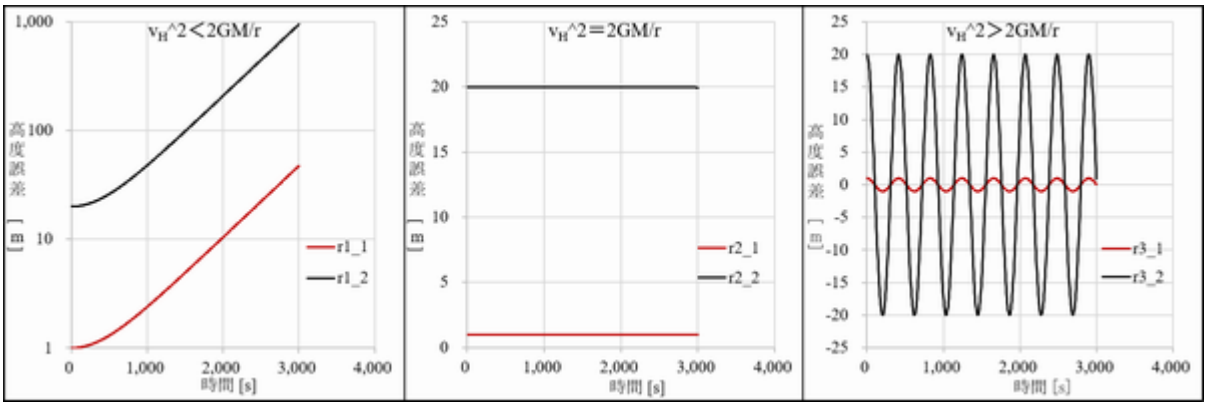
(4) r_{2_2} ： $v_H = \sqrt{2\frac{GM}{r_0}}$、 $\delta r_0 = 20$[m]

(5) r_{3_1} ： $v_H = 20\sqrt{2\frac{GM}{r_0}}$、$\delta r_0 =$ 1[m]

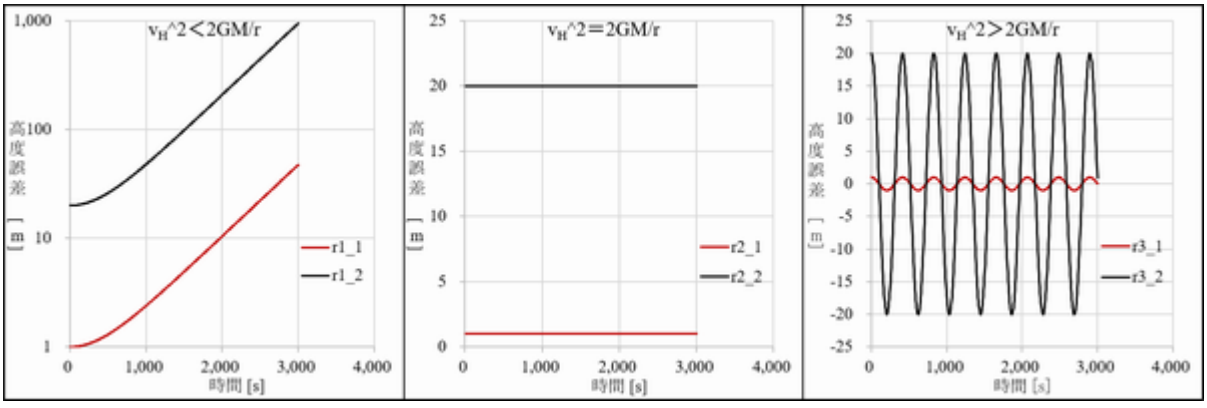
(6) r_{3_2} ： $v_H = 20\sqrt{2\frac{GM}{r_0}}$、$\delta r_0 = 20$[m]

なお、下記のグラフでは軌道半径誤差を高度誤差と表示している。

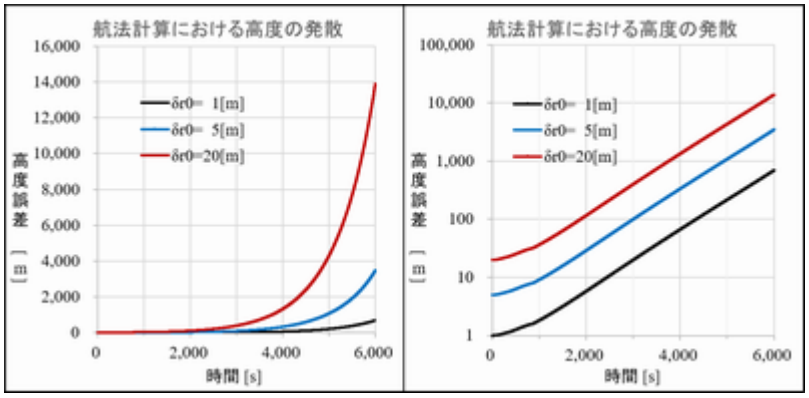
数値積分による結果



解析式（理論式）による結果



実データ（H-IIB ロケット）の解析式による結果



航法計算における軌道半径とは、地球中心から慣性計測装置までの距離のことであり、この距離は正確に分かっている。上のグラフに示した実際のロケットでは、時間経過に伴って大きな誤差が発生するように見えるが、航法誤差初期値 δr0 は 1[m]よりはるかに小さく、これにより発生する高度誤差は無視して良い程度と考えている。

一方、慣性計測装置を航空機に搭載して行う試験では、地球中心から慣性計測装置までの距離は正確には分かっていないので、大きな誤差が発生することになる。このため後日、取得した計測データを用いて航法誤差初期値 δr0 を推定し、初期誤差が無いように補正して評価し直している。