

3種類の座標系による運動方程式の比較

運動方程式は表現座標系によって異なる式で表される。ここでは3種類の座標系での運動方程式を導出し、それらを利用した物体の運動の計算例を示す。

目次

1 慣性系における運動方程式.....	2
2 非慣性直交座標系における運動方程式.....	2
3 非慣性系における運動方程式の極座標系による表現	3
4 例題	6
4.1 地球周回軌道.....	6
4.1.1 地球モデル.....	7
4.1.2 局地座標系の運動.....	7
4.1.3 物体座標系の回転運動.....	8
4.1.4 外力	9
4.1.5 慣性座標系で解く.....	9
4.1.6 局地座標系(非慣性直交座標系)で解く	10
4.1.7 極座標系で解く	10

1 慣性系における運動方程式

物体の運動は慣性系で観察するのが簡単で、通常良く用いられる方法である。図1-1に示したように慣性座標系Iを(O-x-y-z)としたとき、物体の速度および位置は次の加速度を数値積分して求められる。

ここで、 $\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: 位置ベクトル

F : 外力ベクトル

m : 質量

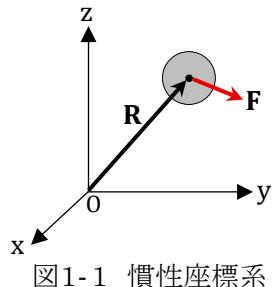


図1-1 慣性座標系

2 非慣性直交座標系における運動方程式

見かけの力である慣性力を観察するため、非慣性系で物体の動きを観察する。

非慣性座標系Lを(o-i-j-k)とする。非慣性系は原点が慣性系に対して加速度運動し、その原点周りに回転運動する座標系である。

ここで、 \mathbf{d} :慣性座標系Iから見た非慣性座標系Lの原点の位置ベクトル

r : 非慣性座標系 L から見た物体の位置ベクトル

D_L^I :慣性座標系Iから見た非慣性座標系Lの方向余弦行列

上記を 2 回微分して

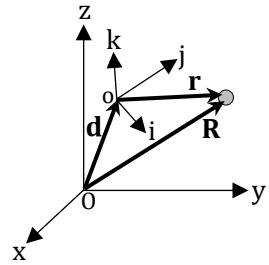


図 2-1 非慣性座標系

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_L^I \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}) + \mathbf{D}_L^I \cdot (\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_L \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_L \times \dot{\mathbf{r}}) \\
 &= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_L^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_L \times] \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}) + \mathbf{D}_L^I \cdot (\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_L \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_L \times \dot{\mathbf{r}}) \\
 &= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_L^I \cdot \{\boldsymbol{\omega}_L \times (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}) + \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_L \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_L \times \dot{\mathbf{r}}\} \\
 &= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_L^I \cdot \{\ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega}_L \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega}_L \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_L \times \mathbf{r}\} \quad : \text{加速度ベクトル}
 \end{aligned} \quad (2-3)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{d}}$:慣性座標系Iから見た非慣性座標系Lの原点の速度ベクトル

d :慣性座標系Iから見た非慣性座標系Lの原点の加速度ベクトル

$\dot{\mathbf{r}}$: 非慣性座標系Lから見た物体の速度ベクトル

$\ddot{\mathbf{r}}$: 非慣性座標系 L から見た物体の加速度ベクトル

ω_L : 非慣性座標系 L の回転角速度ベクトル

$\dot{\omega}_L$: 非慣性座標系Lの回転角加速度ベクトル

慣性座標系における加速度の式(2-3)は、両辺に質量 m を乗じて力に変換して下記のようにニュートンの運動方程式として表される。

ここで、 $m\ddot{\mathbf{d}}$: 非慣性座標系を並進運動させる力

式(2-4)の両辺を質量 m で割って、方向余弦行列 \mathbf{D}_L^I の転置行列(逆行列に等しい)を左から掛けて非慣性座標系 L に座標変換すると、

式(2-5)から非慣性座標系Lにおける加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{r}}$ が下記のように求められる。

ここで、 $\frac{\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{F}}{m}$:外力 (による加速度)

$-\mathbf{D}_L^T \cdot \ddot{\mathbf{d}}$:並進的加速度運動による慣性力 (による加速度)

$-2(\omega_L \times \dot{\mathbf{r}})$:コリオリの力 (による加速度)

$-\omega_L \times (\omega_L \times \mathbf{r})$: 遠心力 (による加速度)

$-\dot{\omega}_L \times \mathbf{r}$: オイラー力 (による加速度)

式(2-6)の右辺第1項は実在する外力で、慣性座標系Iで表されている場合は非慣性座標系Lに座標変換される。右辺第2項～第5項の4種の力は、非慣性座標系原点の並進的運動と原点回りの回転運動によって発生した力で、非慣性系で物体の運動を記述したときの数式の上だけで現れ、実在しない「見かけの力」である。

簡単な例として等速円運動について示す。非慣性座標系(回転座標系)は図2-1に示したk軸周りにi-j平面内での回転($\omega_L = \text{一定}$ 、 $\dot{\omega}_L = \mathbf{0}$)とする。回転座標系に対する物体の運動は($\mathbf{r} = \text{一定}$ 、 $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ 、 $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$)なので、式(2-6)は次のように表される(回転座標系の原点は慣性系に一致させた)。

よって、外力 $[\mathbf{D}_L^T \cdot \mathbf{F}_B]$ は向心力 $(-\mathbf{i}$ 方向)でなければならず、見かけの力 $m\omega_k^2 r$ (遠心力、 \mathbf{i} 方向)とつり合うことになる。

3 非慣性系における運動方程式の極座標系による表現

極座標系Q($o-e_r-e_{\theta}-e_{\varphi}$)は慣性座標系I($o-x-y-z$)の第3軸(z 軸)周りに φ 回転し、第2軸(y 軸)が回転してできた新しい第2軸周りに θ 回転した座標系で、図3-1に示す。

$$(\mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{e}_r) = (\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix}) \cdot [\varphi]_3 \cdot [\theta]_2 : \text{座標系の回転}$$

極座標系Qの座標軸を \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_θ - \mathbf{e}_φ の順にするため、軸入替え用の行列を追加して、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{e}_\varphi) &= (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \cdot [\varphi]_3 \cdot [\theta]_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad \text{図 3}$$

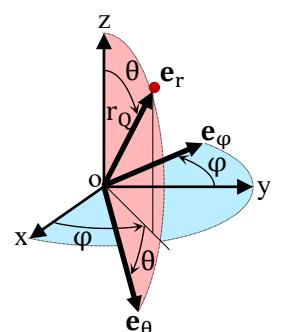


図 3-1 極座標系

この両辺に左から $(\begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix})$ の転置行列(逆行列に等しい)を乗じて変形すると、次のように方向余弦行列を表すことができる。

$$\begin{aligned}
 (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z})^T \cdot (\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\varphi) &= (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z})^T \cdot (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \underline{x} & \mathbf{e}_\theta \cdot \underline{x} & \mathbf{e}_\varphi \cdot \underline{x} \\ \mathbf{e}_r \cdot \underline{y} & \mathbf{e}_\theta \cdot \underline{y} & \mathbf{e}_\varphi \cdot \underline{y} \\ \mathbf{e}_r \cdot \underline{z} & \mathbf{e}_\theta \cdot \underline{z} & \mathbf{e}_\varphi \cdot \underline{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} : \text{極座標系Qの方向余弦行列}
 \end{aligned}$$

極座標系Qの角速度は、上の方向余弦行列を微分して、

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{D}}_Q^I &= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta & -\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta & -\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta & \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta & -\dot{\varphi} \sin \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{\varphi} \sin \theta & \dot{\varphi} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 \dot{\mathbf{D}}_Q^I &= \mathbf{D}_Q^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_Q \times] = \mathbf{D}_Q^I \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_\varphi & \omega_\theta \\ \omega_\varphi & 0 & -\omega_r \\ -\omega_\theta & \omega_r & 0 \end{pmatrix} \text{と表せるから、} \\
 \begin{pmatrix} 0 & -\omega_\varphi & \omega_\theta \\ \omega_\varphi & 0 & -\omega_r \\ -\omega_\theta & \omega_r & 0 \end{pmatrix} &= [\boldsymbol{\omega}_Q \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{\varphi} \sin \theta & \dot{\varphi} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 \boldsymbol{\omega}_Q &= \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} : \text{極座標系 } Q \text{ の角速度ベクトル}
 \end{aligned}$$

方向余弦行列(3-2)より、極座標系の軸単位ベクトルは次のように表される。

$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \sin \theta \underline{x} + \sin \varphi \sin \theta \underline{y} + \cos \theta \underline{z}$:動径方向単位ベクトル

$\mathbf{e}_\theta = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{x} + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{y} - \sin \theta \mathbf{z}$: 法線方向単位ベクトル

$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{x} + \cos \varphi \mathbf{y}$:接線方向単位ベクトル

$$\text{ここで、} (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\dot{\underline{x}} \quad \dot{\underline{y}} \quad \dot{\underline{z}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これらを微分して、

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\varphi} \left(-\sin \varphi \sin \theta \underline{x} + \cos \varphi \sin \theta \underline{y} \right) + \dot{\theta} \left(\cos \varphi \cos \theta \underline{x} + \sin \varphi \cos \theta \underline{y} - \sin \theta \underline{z} \right) \\
 &= \dot{\varphi} \sin \theta \left(-\sin \varphi \underline{x} + \cos \varphi \underline{y} \right) + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\
 &= \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\theta &= \dot{\varphi} \left(-\sin \varphi \cos \theta \underline{\mathbf{x}} + \cos \varphi \cos \theta \underline{\mathbf{y}} \right) + \dot{\theta} \left(-\cos \varphi \sin \theta \underline{\mathbf{x}} - \sin \varphi \sin \theta \underline{\mathbf{y}} - \cos \theta \underline{\mathbf{z}} \right) \\ &= \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi - \dot{\theta} \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \left(\cos \varphi \underline{\mathbf{x}} + \sin \varphi \underline{\mathbf{y}} \right)\end{aligned}$$

この $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}\sin \theta \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \sin^2 \theta \underline{x} + \sin \varphi \sin^2 \theta \underline{y} + \sin \theta \cos \theta \underline{z} \\ \cos \theta \mathbf{e}_\theta &= \cos \varphi \cos^2 \theta \underline{x} + \sin \varphi \cos^2 \theta \underline{y} - \cos \theta \sin \theta \underline{z} \\ \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta &= \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \underline{x} + \sin \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \underline{y} \\ &= \cos \varphi \underline{x} + \sin \varphi \underline{y}\end{aligned}$$

これを上の式に代入して、

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta)$$

極座標系における物体の位置ベクトルは次のように表される。

ここで、 \mathbf{R} :慣性座標系Iから見た位置ベクトル

\mathbf{e}_r : 慣性座標系Iから見た極座標系Qの動径方向単位ベクトル

r_Q : 極座標系 Q における動径方向の距離

これを微分して速度ベクトルは次のように表される。

さらに微分して加速度ベクトルは次のように表される。

2項に示したように、加速度ベクトルの両辺に質量 m を乗じて力の次元にすると、下記のように運動方程式として表すことができる。

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = m(\ddot{r}_Q - r_Q\dot{\theta}^2 - r_Q\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)\mathbf{e}_r + m(r_Q\ddot{\theta} + 2\dot{r}_Q\dot{\theta} - r_Q\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta)\mathbf{e}_\theta + m(r_Q\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}_Q\dot{\phi} \sin \theta + 2r_Q\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{e}_\phi$$

ここで極座標系で外力は次のように表すことができる。

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\theta + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varphi)\mathbf{e}_\varphi : \text{極座標系Qの座標軸方向の外力}$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r = m(\ddot{r}_Q - r_Q \dot{\theta}^2 - r_Q \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r : \text{動径方向の外力}$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta = m(r_Q \ddot{\theta} + 2\dot{r}_Q \dot{\theta} - r_Q \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta : \text{法線方向の外力}$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{e}_\varphi = m(r_Q \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}_Q \dot{\varphi} \sin \theta + 2r_Q \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi : \text{接線方向の外力}$$

以上より、 r_Q, θ, φ の 2 次導関数は次のように表される。

極座標系で物体の運動を求めるには、上の3元連立二階常微分方程式を数値積分することになる。

4 例題

4.1 地球周回軌道

エンジン推力によって軌道変換しつつ地球周回する人工衛星の運動を計算する。

運動方程式は次の3種類を比較できるように解く。

(1) 慣性座標系で解く

(2) 非慣性直交座標系で解く

(3) 極座標系で解く

なお、非慣性直交座標系は原点が慣性座標系に対して加速度運動するものとする。

ここで用いる慣性座標系と非慣性直交座標系を図4-1に示す。図示した慣性座標系は地球中心に原点、初期($t=0$ 時)のグリニッジ子午面と赤道面の交線方向にx軸、自転軸方向にz軸、x-y-zで右手系を成す方向にy軸を定義した座標系(o-x-y-z)である。図示した非慣性直交座標系は一般的には「局地座標系」と呼ばれ、特定の地表面に原点を固定した座標系で、慣性座標系I(o-x-y-z)の第3軸(z軸)周りに自転を考慮した経度 $\lambda + \omega_e t$ だけ回転し、第2軸(y軸)が回転して新しくできた第2軸周りに緯度 $-\varphi_c$ だけ回転してできた座標系(o-i-j-k)である。ここで i 軸は地表面の特定地点における鉛直上向き、j 軸と k 軸は局所水平面内に在り、j 軸は東向き、k 軸は北向きである。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\lambda + \omega_e t]_3 \cdot [-\varphi_c]_2 \\
 &= \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin(\lambda + \omega_e t) & 0 \\ \sin(\lambda + \omega_e t) & \cos(\lambda + \omega_e t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_c & 0 & -\sin \varphi_c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin(\lambda + \omega_e t) & -\sin \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ \cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) & \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ \sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c \end{pmatrix} \\
 \mathbf{D}_L^L &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin(\lambda + \omega_e t) & -\sin \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ \cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) & \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ \sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系 L 方向余弦行列}
 \end{aligned}$$

φ_c :緯度 [deg]

λ : 経度 [deg]

ω_e : 地球自轉角速度 [deg/s]

$$\boldsymbol{\omega}_L \equiv \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} = \omega_e \begin{pmatrix} \sin \varphi_c \\ 0 \\ \cos \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系 } L \text{ 回転角速度ベクトル [deg/s]}$$

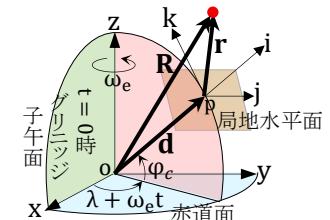


図 4-1 座標系

$\dot{\omega}_L = \mathbf{0}$:局地座標系L回転角加速度ベクトル [deg/s²]

4.1.1 地球モデル

地球は球形とする。

$\mu = 3.986005 \times 10^{14}$:地球重力定数 [m³/s²]

$R_e = 6371 \times 10^3$:地球平均半径 [m]

$\omega_e = 4.178 \times 10^{-3}$:地球自転角速度 [deg/s]

4.1.2 局地座標系の運動

非慣性直交座標系は局地座標系を用いる。

$$\mathbf{D}_L^I = \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin(\lambda + \omega_e t) & -\sin \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ \cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) & \cos(\lambda + \omega_e t) & -\sin \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ \sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系方向余弦行列}$$

$$\mathbf{d} \equiv \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_e \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ \cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ \sin \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系原点位置 [m]}$$

これを微分して、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}} &\equiv \begin{pmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{d}_z \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{D}}_L^I \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_L \times] \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_k & \omega_j \\ \omega_k & 0 & -\omega_i \\ -\omega_j & \omega_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R_e \omega_k \\ -R_e \omega_j \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}_L^I \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R_e \omega_e \cos \varphi_c \\ 0 \end{pmatrix} = R_e \omega_e \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ \cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ 0 \end{pmatrix} : \text{局地座標系原点速度 [m/s]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}} &\equiv \begin{pmatrix} \ddot{d}_x \\ \ddot{d}_y \\ \ddot{d}_z \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{D}}_L^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_L \times] \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_L \times] \cdot [\boldsymbol{\omega}_L \times] \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}_L^I \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_k & \omega_j \\ \omega_k & 0 & -\omega_i \\ -\omega_j & \omega_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_k & \omega_j \\ \omega_k & 0 & -\omega_i \\ -\omega_j & \omega_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot R_e \begin{pmatrix} -\omega_j^2 - \omega_k^2 \\ \omega_i \omega_j \\ \omega_i \omega_k \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}_L^I \cdot R_e \omega_e^2 \begin{pmatrix} -\cos^2 \varphi_c \\ 0 \\ \sin \varphi_c \cos \varphi_c \end{pmatrix} = R_e \omega_e^2 \begin{pmatrix} -\cos^3 \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) - \sin^2 \varphi_c \cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ -\cos^3 \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) - \sin^2 \varphi_c \cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ -\sin \varphi_c \cos^2 \varphi_c + \sin \varphi_c \cos^2 \varphi_c \end{pmatrix} \\ &= R_e \omega_e^2 \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_e t) \\ -\cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_e t) \\ 0 \end{pmatrix} : \text{局地座標系原点加速度 [m/s²]}$$

$$\boldsymbol{\omega}_L \equiv \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} = \omega_e \begin{pmatrix} \sin \varphi_c \\ 0 \\ \cos \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系回転角速度 [deg/s]}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_L \equiv \begin{pmatrix} \dot{\omega}_i \\ \dot{\omega}_j \\ \dot{\omega}_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} : \text{局地座標系回転角加速度 [deg/s²]}$$

(1) 初期値

$$\mathbf{D}_{L0}^I = \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos \lambda & -\sin \lambda & -\sin \varphi_c \cos \lambda \\ \cos \varphi_c \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \varphi_c \sin \lambda \\ \sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系方向余弦行列初期値}$$

$$\mathbf{d}_0 \equiv \begin{pmatrix} d_{x0} \\ d_{y0} \\ d_{z0} \end{pmatrix} = R_e \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos \lambda \\ \cos \varphi_c \sin \lambda \\ \sin \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系原点初期位置 [m]}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_0 \equiv \begin{pmatrix} \dot{d}_{x0} \\ \dot{d}_{y0} \\ \dot{d}_{z0} \end{pmatrix} = \omega_e R_e \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c \sin \lambda \\ \cos \varphi_c \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \text{局地座標系原点初期速度 [m/s]}$$

(2) 関連諸量

$$\varphi_c = \tan^{-1} \left(\frac{d_z}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2}} \right) : \text{局地座標系原点緯度 [deg]}$$

$$\lambda_c = \tan^{-1} \left(\frac{d_y}{d_x} \right) - \omega_e t : \text{局地座標系原点経度 [deg]}$$

4.1.3 物体座標系の回転運動

物体座標系は一定の角加速度で運動するものとする。

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \equiv \begin{pmatrix} \dot{\omega}_R \\ \dot{\omega}_P \\ \dot{\omega}_Y \end{pmatrix} : \text{角加速度(一定) [deg/s}^2]$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B0} \equiv \begin{pmatrix} \omega_{R0} \\ \omega_{P0} \\ \omega_{Y0} \end{pmatrix} : \text{初期角速度 [deg/s]}$$

$$\omega_R : ロールレート [deg/s]$$

$$\omega_P : ピッヂレート [deg/s]$$

$$\omega_Y : ヨーレート [deg/s]$$

$$\mathbf{D}_B^I \equiv (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) : \text{物体座標系B方向余弦行列}$$

(1) 微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_B^I &\equiv (\dot{\underline{x}}_B \ \dot{\underline{y}}_B \ \dot{\underline{z}}_B) = (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_Y & \omega_P \\ \omega_Y & 0 & -\omega_R \\ -\omega_P & \omega_R & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\omega_Y \underline{y}_B - \omega_P \underline{z}_B \ \omega_R \underline{z}_B - \omega_Y \underline{x}_B \ \omega_P \underline{x}_B - \omega_R \underline{y}_B) : \text{方向余弦行列微係数} \end{aligned}$$

(2) 初期値

物体座標系Bの初期姿勢は x_B 軸(ロール軸)が速度ベクトル方向、 z_B 軸(ヨー軸)が位置ベクトル(地心半径)の逆方向、 y_B 軸(ピッヂ軸)が z_B 軸と x_B 軸に垂直な方向とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{B0}^I &\equiv (\underline{x}_{B0} \ \underline{y}_{B0} \ \underline{z}_{B0}) = \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}}{|\dot{\mathbf{R}}|} \ \underline{z}_B \times \underline{x}_B \ - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \sin \varphi_c \cos \lambda & -\cos \varphi_c \cos \lambda \\ \cos \lambda & \sin \varphi_c \sin \lambda & -\cos \varphi_c \sin \lambda \\ 0 & -\cos \varphi_c & -\sin \varphi_c \end{pmatrix} : \text{初期物体姿勢} \end{aligned}$$

4.1.4 外力

物体に作用する外力としては、万有引力と衛星に搭載された推進装置の推力を考える。

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{R^3} \mathbf{R} + \mathbf{T}_{XB} : \text{物体に作用する外力(万有引力 + 推力)} [N]$$

\mathbf{T} : 推力 [N]

m : 質量 [kg]

4.1.5 慣性座標系で解く

(3) 微分方程式

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}}{m} [m/s^2]$$

(4) 初期値

φ_c : 緯度 [deg]

λ : 経度 [deg]

h : 高度 [m]

$R_0 = R_e + h$: 初期地心半径 [m]

$$\dot{R}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}$$

初期速度 [m/s]

$$\mathbf{R}_0 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos \lambda \\ \cos \varphi_c \sin \lambda \\ \sin \varphi_c \end{pmatrix}$$

慣性座標系初期位置ベクトル [m]

初期速度は水平東向きとする。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_0 &\equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{R}_0 \begin{pmatrix} \frac{z}{|z \times \mathbf{R}_0|} \\ \frac{z \times \mathbf{R}_0}{|z \times \mathbf{R}_0|} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\dot{R}_0}{\cos \varphi_c} \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c \sin \lambda \\ \cos \varphi_c \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{R}_0 \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

慣性座標系初期速度ベクトル [m/s]

(5) 関連諸量

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^T \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{d})$$

局地座標系における位置ベクトル [m]

$r_Q = |\mathbf{R}|$: 極座標系動径方向距離 [m]

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$$

極座標系法線方向角 [deg]

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

極座標系接線方向角 [deg]

$h_L = |\mathbf{R}| - R_e$: 局地座標系高度 [m]

$\varphi_L = 90^\circ - \theta$: 局地座標系緯度 [deg]

$\lambda_L = \varphi - \omega_e t$: 局地座標系経度 [deg]

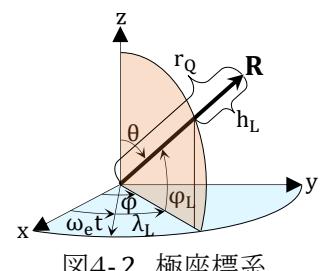


図4-2 極座標系

4.1.6 局地座標系(非慣性直交座標系)で解く

(1) 微分方程式

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{D}_L^I{}^T \cdot \mathbf{F}}{m} - \mathbf{D}_L^I{}^T \cdot \ddot{\mathbf{d}} - 2(\boldsymbol{\omega}_L \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\omega}_L \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_L \times \mathbf{r} \quad [\text{m/s}^2]$$

(2) 初期値

$$\mathbf{r}_0 \equiv \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{L0}^I{}^T \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{d}_0) : \text{局地座標系初期位置ベクトル} \quad [\text{m}]$$

局地座標系速度ベクトルは式(2-2)を変形して、次のように表される。

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{D}_{L0}^I{}^T \cdot (\dot{\mathbf{R}}_0 - \dot{\mathbf{d}}_0) - \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}_0 : \text{局地座標系初期速度ベクトル} \quad [\text{m/s}]$$

$$\mathbf{D}_{L0}^I = \begin{pmatrix} \cos \varphi_c \cos \lambda & -\sin \lambda & -\sin \varphi_c \cos \lambda \\ \cos \varphi_c \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \varphi_c \sin \lambda \\ \sin \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c \end{pmatrix} : \text{局地座標系方向余弦行列初期値} \quad [\text{ND}]$$

(3) 関連諸量

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{d} + \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{r} : \text{慣性座標系における位置ベクトル} \quad [\text{m}]$$

$$r_Q = |\mathbf{R}| : \text{極座標系動径方向距離} \quad [\text{m}]$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) : \text{極座標系法線方向角} \quad [\text{deg}]$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) : \text{極座標系接線方向角} \quad [\text{deg}]$$

$$h_L = |\mathbf{R}| - R_e : \text{局地座標系高度} \quad [\text{m}]$$

$$\varphi_L = 90^\circ - \theta : \text{局地座標系緯度} \quad [\text{deg}]$$

$$\lambda_L = \varphi - \omega_e t : \text{局地座標系経度} \quad [\text{deg}]$$

4.1.7 極座標系で解く

(1) 微分方程式

$$\ddot{r}_Q = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r}{m} + r_Q(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) : \text{動径方向加速度} \quad [\text{m/s}^2]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta}{m} - 2\dot{r}_Q \dot{\theta} + r_Q \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta}{r_Q} : \text{法線方向角加速度} \quad [\text{deg/s}^2]$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varphi}{m} - 2\dot{r}_Q \dot{\varphi} \sin \theta - 2r_Q \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta}{r_Q \sin \theta} : \text{接線方向角加速度} \quad [\text{deg/s}^2]$$

ここで、 $0 < |r_Q|$ 、 $0^\circ < |\theta| < 180^\circ$ とする。

(2) 初期値

$$\mathbf{r}_{Q0} \equiv \begin{pmatrix} r_{Q0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{極座標系初期動径ベクトル} \quad [\text{m}]$$

$$r_{Q0} = |\mathbf{R}_0| : \text{極座標系初期動径方向距離} \quad [\text{m}]$$

$$\theta_0 = 90^\circ - \varphi_c : \text{極座標系初期法線方向角(緯度の余角)} \quad [\text{deg}]$$

$$\varphi_0 = \lambda : \text{極座標系初期接線方向角(経度)} \quad [\text{deg}]$$

極座標系Qの微係数は式(3-4)を変形して、次のように表される。

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}_Q \mathbf{e}_r + r_Q (\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_{Q0} \\ \dot{\varphi}_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{e}_{r0} \\ \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{e}_{\theta0}/(r_{Q0} \sin \theta_0) \\ \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{e}_{\varphi0}/r_{Q0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{Q0}^I \equiv (\mathbf{e}_{r0} \quad \mathbf{e}_{\theta0} \quad \mathbf{e}_{\varphi0}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \sin \theta_0 & \cos \varphi_0 \cos \theta_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \sin \theta_0 & \sin \varphi_0 \cos \theta_0 & \cos \varphi_0 \\ \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \end{pmatrix} : \text{初期方向余弦行列}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{Q0} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_0 \cos \theta_0 \\ -\dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix} : \text{極座標系初期角速度 [deg/s]}$$

$\dot{r}_{Q0} = \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{e}_{r0}$: 極座標系初期動径方向速度 [m/s]

$\dot{\theta}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{e}_{\theta0}/(r_{Q0} \sin \theta_0)$: 極座標系初期法線方向角速度 [deg/s]

$\dot{\varphi}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{e}_{\varphi0}/r_{Q0}$: 極座標系初期接線方向角速度 [deg/s]

(3) 関連諸量

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r_Q \mathbf{e}_r : \text{慣性座標系における位置ベクトル [m]}$$

$$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I{}^T \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{d}) : \text{局地座標系における位置ベクトル [m]}$$

$h_L = |\mathbf{R}| - R_e$: 局地座標系高度 [m]

$\varphi_L = 90^\circ - \theta$: 局地座標系緯度 [deg]

$\lambda_L = \varphi - \omega_e t$: 局地座標系経度 [deg]