

粘性抵抗と慣性抵抗を受ける物体の運動

目 次

1 水平運動	2
1.1 速度が正の場合	2
1.1.1 運動方程式	2
1.1.2 速度	2
1.1.3 位置	4
1.1.3.1 最終値	4
1.2 速度が負の場合	5
1.2.1 運動方程式	5
1.2.2 速度	5
1.2.3 位置	6
1.2.4 最終値	7
2 鉛直運動	8
2.1 速度が正の場合	8
2.1.1 運動方程式	8
2.1.2 速度	8
2.2 速度が負の場合	9
2.2.1 運動方程式	9
2.2.2 速度	9
2.2.3 位置	12
2.2.4 最終値	14
3 計算例	15

物体の運動を水平方向の右向きを正として x 軸を、鉛直方向の上向きを正として y 軸を定義し、それぞれ
の方向に分けて記述する。また、慣性抵抗は符号を考慮して次のように表されるので、速度の正負に場合分
けして記述する。

$$f_{\beta} = -\beta v|v| = -\text{sign}(v)\beta v^2 = \begin{cases} -\beta v^2 & : 0 \leq v \text{ のとき} \\ \beta v^2 & : v < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

1 水平運動

1.1 速度が正の場合

1.1.1 運動方程式

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x - \beta v_x^2 : \text{運動方程式} \dots\dots\dots (1.1-1)$$

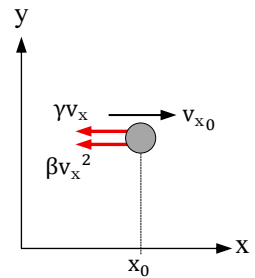
$$\frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x - \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2 : \text{加速度} \dots\dots\dots (1.1-2)$$

m : 質量[kg]

v_x : 速度[m/s]

γ : 粘性抵抗係数[kg/s]

β : 慣性抵抗係数[kg/m]



1.1.2 速度

加速度(1.1-2)を変形して時間積分する。

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2} \frac{dv_x}{dt} = -1$$

$$\int \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2} \left(\frac{dv_x}{dt}\right) dt = - \int 1 dt$$

$$\int \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2} \right\} dv_x = - \int 1 dt : \text{変数分離形} \dots\dots\dots (1.1-3)$$

左辺の分母が2次式で積分困難なので、1次式に部分分数分解する。

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2} = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x \left\{ 1 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x \right\}} = \frac{a}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x} + \frac{b}{1 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x}$$

これを通分した分子は次のようになる。

$$a \left\{ 1 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x \right\} + b \left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x = a + \left\{ a \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + b \left(\frac{\gamma}{m}\right) \right\} v_x = 1$$

よって、下記の2式が成り立つ必要がある。

$$a = 1$$

$$a\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + b\left(\frac{\gamma}{m}\right) = 0$$

上の式から次のように係数が決定される。

$$a = 1$$

$$b = -\frac{m\beta}{\gamma^2}$$

上の係数を元の式に代入して、

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x} + \frac{-\frac{m\beta}{\gamma^2}}{1 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x} = \left(\frac{m}{\gamma}\right)\frac{1}{v_x} - \left(\frac{m}{\gamma}\right)\frac{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}{1 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x} = \left(\frac{m}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{v_x} - \frac{\beta}{\gamma + \beta v_x}\right)$$

従って、積分の式は次のように表される。

$$\frac{m}{\gamma} \left\{ \int \left(\frac{1}{v_x} \right) dv_x - \int \left(\frac{\beta}{\gamma + \beta v_x} \right) dv_x \right\} = - \int 1 dt \dots\dots\dots (1.1-4)$$

この積分を実行して、

$$\frac{m}{\gamma} \{ \ln(v_x) - \ln(\gamma + \beta v_x) \} = -t + C$$

C : 積分定数

積分結果を整理して、

$$\frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_x}{\gamma + \beta v_x} \right) = -t + C \dots\dots\dots (1.1-5)$$

t=0 の初期条件を代入して、

$$C = \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_{x0}}{\gamma + \beta v_{x0}} \right) : \text{積分定数} \dots\dots\dots (1.1-6)$$

積分結果(1.1-5)に積分定数(1.1-6)を代入し、速度 v_x を求める。

$$\frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_x}{\gamma + \beta v_x} \right) = -t + \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_{x0}}{\gamma + \beta v_{x0}} \right)$$

$$\frac{m}{\gamma} \left\{ \ln \left(\frac{v_x}{\gamma + \beta v_x} \right) - \ln \left(\frac{v_{x0}}{\gamma + \beta v_{x0}} \right) \right\} = -t$$

$$\ln \left\{ \frac{v_x(\gamma + \beta v_{x0})}{v_{x0}(\gamma + \beta v_x)} \right\} = -\frac{\gamma}{m} t$$

$$\frac{v_x(\gamma + \beta v_{x0})}{v_{x0}(\gamma + \beta v_x)} = e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x(\gamma + \beta v_{x0}) = v_{x0}(\gamma + \beta v_x) e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x \left\{ \gamma + \beta v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right) \right\} = \gamma v_{x0} e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x \left\{ 1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right) \right\} = v_{x0} e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x = \frac{v_{x0} e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})} : \text{水平速度} \dots\dots\dots (1.1-7)$$

1.1.3 位置

速度を積分して位置を求める。

速度の式(1.1-7)には指数関数が入っているので、次のように置換積分を利用する。

$$u = e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

これを微分して、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\gamma}{m} e^{-\frac{\gamma}{m}t} = -\frac{\gamma}{m} u$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)u} du = dt$$

$$x = \int v_x dt = \int \left\{ \frac{v_{x0} u}{1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} (1 - u)} \right\} dt = -\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)u} \int \left\{ \frac{v_{x0} u}{1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} (1 - u)} \right\} du$$

$$= -mv_{x0} \int \left\{ \frac{1}{\gamma + \beta v_{x0} (1 - u)} \right\} du$$

$$= -mv_{x0} \frac{1}{(-\beta v_{x0})} \ln\{\gamma + \beta v_{x0} (1 - u)\} + C = \frac{m}{\beta} \ln\{\gamma + \beta v_{x0} (1 - u)\} + C$$

C : 積分定数

u を元に戻して

$$x = \frac{m}{\beta} \ln\{\gamma + \beta v_{x0} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})\} + C \dots\dots\dots (1.1-8)$$

t=0 の初期条件を代入して、

$$x_0 = \frac{m}{\beta} \ln[\gamma + \beta v_{x0} \{1 - 1\}] + C = \frac{m}{\beta} \ln(\gamma) + C$$

$$C = x_0 - \frac{m}{\beta} \ln(\gamma) : \text{積分定数} \dots\dots\dots (1.1-9)$$

積分結果(1.1-8)式に積分定数(1.1-9)式を代入して、

$$x = \frac{m}{\beta} \ln\{\gamma + \beta v_{x0} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})\} + x_0 - \frac{m}{\beta} \ln(\gamma)$$

$$= x_0 + \frac{m}{\beta} \ln\left\{ \frac{\gamma + \beta v_{x0} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})}{\gamma} \right\}$$

$$= x_0 + \frac{m}{\beta} \ln\left\{ 1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \right\} : \text{水平位置} \dots\dots\dots (1.1-10)$$

1.1.3.1 最終値

t→∞の最終条件を式(1.1-7)および式(1.1-9)に代入して、

$$v_{xf} = 0 : \text{最終水平速度} \cdots \cdots \cdots (1.1-10)$$

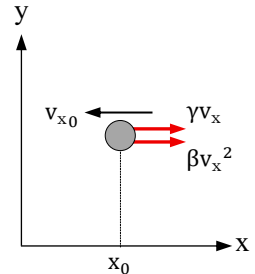
$$x_f = x_0 + \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \right) : \text{最終水平位置} \cdots \cdots \cdots (1.1-11)$$

1.2 速度が負の場合

1.2.1 運動方程式

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x + \beta v_x^2 : \text{運動方程式} \cdots \cdots \cdots (1.2-1)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x + \left(\frac{\beta}{m}\right) v_x^2 : \text{加速度} \cdots \cdots \cdots (1.2-2)$$



1.2.2 速度

加速度(1.2-2)を変形して時間積分する。

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x - \left(\frac{\beta}{m}\right) v_x^2} \frac{dv_x}{dt} = -1$$

$$\int \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x - \left(\frac{\beta}{m}\right) v_x^2} \left(\frac{dv_x}{dt}\right) dt = - \int 1 dt$$

$$\int \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x - \left(\frac{\beta}{m}\right) v_x^2} \right\} dv_x = - \int 1 dt : \text{変数分離形} \cdots \cdots \cdots (1.2-3)$$

左辺の分母が2次式で積分困難なので、1次式に部分分数分解する。

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x - \left(\frac{\beta}{m}\right) v_x^2} = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x \left\{ 1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) v_x \right\}} = \frac{a}{\left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x} + \frac{b}{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) v_x}$$

これを通分した分子は次のようになる。

$$a \left\{ 1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) v_x \right\} + b \left(\frac{\gamma}{m}\right) v_x = a - \left\{ a \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) - b \left(\frac{\gamma}{m}\right) \right\} v_x = 1$$

よって、下記の2式が成り立つ必要がある。

$$a = 1$$

$$a \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) - b \left(\frac{\gamma}{m}\right) = 0$$

上の式から次のように係数が決定される。

$$a = 1$$

$$b = \frac{m\beta}{\gamma^2}$$

上の係数を元の式に代入して、

$$\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x} + \frac{\frac{m\beta}{\gamma^2}}{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x} = \left(\frac{m}{\gamma}\right)\frac{1}{v_x} + \left(\frac{m}{\gamma}\right)\frac{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)v_x} = \left(\frac{m}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{v_x} + \frac{\beta}{\gamma - \beta v_x}\right)$$

従って、積分の式は次のように表される。

$$\frac{m}{\gamma} \left\{ \int \left(\frac{1}{v_x} \right) dv_x + \int \left(\frac{\beta}{\gamma - \beta v_x} \right) dv_x \right\} = - \int 1 dt \dots\dots\dots (1.2-4)$$

この積分を実行して、

$$\frac{m}{\gamma} \{ \ln(v_x) - \ln(\gamma - \beta v_x) \} = -t + C$$

C : 積分定数

積分結果を整理して、

$$\frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_x}{\gamma - \beta v_x} \right) = -t + C \dots\dots\dots (1.2-5)$$

t=0 の初期条件を代入して、

$$C = \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_{x0}}{\gamma - \beta v_{x0}} \right) : \text{積分定数} \dots\dots\dots (1.2-6)$$

積分結果(1.2-5)に積分定数(1.2-6)を代入し、速度 v_x を求める。

$$\frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_x}{\gamma - \beta v_x} \right) = -t + \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_{x0}}{\gamma - \beta v_{x0}} \right)$$

$$\frac{m}{\gamma} \left\{ \ln \left(\frac{v_x}{\gamma - \beta v_x} \right) - \ln \left(\frac{v_{x0}}{\gamma - \beta v_{x0}} \right) \right\} = -t$$

$$\ln \left\{ \frac{v_x(\gamma - \beta v_{x0})}{v_{x0}(\gamma - \beta v_x)} \right\} = -\frac{m}{\gamma} t$$

$$\frac{v_x(\gamma - \beta v_{x0})}{v_{x0}(\gamma - \beta v_x)} = e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x(\gamma - \beta v_{x0}) = v_{x0}(\gamma - \beta v_x) e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x \left\{ \gamma - \beta v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right) \right\} = \gamma v_{x0} e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x \left\{ 1 - \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right) \right\} = v_{x0} e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$v_x = \frac{v_{x0} e^{-\frac{\gamma}{m} t}}{1 - \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right)} : \text{水平速度} \dots\dots\dots (1.2-7)$$

1.2.3 位置

速度を積分して位置を求める。

速度の式(1.2-7)には指数関数が入っているので、次のように置換積分を利用する。

$$u = e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

これを微分して、

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)e^{-\frac{\gamma}{m}t} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)u$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)u}du = dt$$

$$\begin{aligned} x &= \int v_x dt = \int \left\{ \frac{v_{x0}u}{1 - \frac{\beta}{\gamma}v_{x0}(1-u)} \right\} dt = -\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)u} \int \left\{ \frac{v_{x0}u}{1 - \frac{\beta}{\gamma}v_{x0}(1-u)} \right\} du \\ &= -mv_{x0} \int \left\{ \frac{1}{\gamma - \beta v_{x0}(1-u)} \right\} du \\ &= -mv_{x0} \left(\frac{1}{\beta v_{x0}} \right) \ln\{\gamma - \beta v_{x0}(1-u)\} + C = -\frac{m}{\beta} \ln\{\gamma - \beta v_{x0}(1-u)\} + C \end{aligned}$$

C : 積分定数

u を元に戻して

$$x = -\frac{m}{\beta} \ln\{\gamma - \beta v_{x0}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})\} + C \dots\dots\dots (1.2-8)$$

t=0 の初期条件を代入して、

$$x_0 = -\frac{m}{\beta} \ln\{\gamma - \beta v_{x0}(1 - 1)\} + C = -\frac{m}{\beta} \ln(\gamma) + C$$

$$C = x_0 + \frac{m}{\beta} \ln(\gamma) : \text{積分定数} \dots\dots\dots (1.2-9)$$

積分結果(1.2-8)式に積分定数(1.2-9)式を代入して、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{m}{\beta} \ln\{\gamma - \beta v_{x0}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})\} + x_0 + \frac{m}{\beta} \ln(\gamma) \\ &= x_0 - \frac{m}{\beta} \ln\left\{ \frac{\gamma - \beta v_{x0}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})}{\gamma} \right\} \\ &= x_0 - \frac{m}{\beta} \ln\left\{ 1 - \frac{\beta}{\gamma} v_{x0}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \right\} : \text{水平位置} \dots\dots\dots (1.2-10) \end{aligned}$$

1.2.4 最終値

t→∞の最終条件を式(1.2-7)および式(1.2-10)に代入して、

$$v_{xf} = 0 : \text{最終水平速度} \dots\dots\dots (1.2-11)$$

$$x_f = x_0 - \frac{m}{\beta} \ln\left\{ 1 - \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \right\} : \text{最終水平位置} \dots\dots\dots (1.2-12)$$

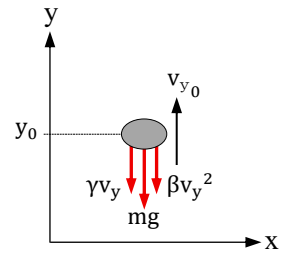
2 鉛直運動

2.1 速度が正の場合

2.1.1 運動方程式

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \gamma v_y - \beta v_y^2 : \text{運動方程式} \dots\dots\dots (2.1-1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \left(\frac{\gamma}{m}\right) v_y - \left(\frac{\beta}{m}\right) v_y^2 : \text{加速度} \dots\dots\dots (2.1-2)$$



2.1.2 速度

加速度(2.1-2)を変形して時間積分する。

$$\frac{1}{g + \left(\frac{\gamma}{m}\right) v_y + \left(\frac{\beta}{m}\right) v_y^2} \frac{dv_y}{dt} = -1$$

左辺の分母が2次式で積分困難なので、1次式に部分分数分解する。

$$\frac{1}{g + \left(\frac{\gamma}{m}\right) v_y + \left(\frac{\beta}{m}\right) v_y^2} = \frac{1}{f} \left(\frac{c}{a + v_y} + \frac{d}{b - v_y} \right)$$

これを通分した分母は、

$$f(a + v_y)(b - v_y) = fab - f(a - b)v_y - fv_y^2 = g + \left(\frac{\gamma}{m}\right) v_y + \left(\frac{\beta}{m}\right) v_y^2$$

よって、下記の3式が成り立つ必要がある。

$$fab = g$$

$$f(a - b) = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)$$

$$f = -\left(\frac{\beta}{m}\right)$$

上記を連立して解いて、

$$-\left(\frac{\beta}{m}\right)(a - b) = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)$$

$$a - b = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

$$b = a - \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

$$-\left(\frac{\beta}{m}\right)a \left\{ a - \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \right\} = 1$$

$$a^2 - \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)a + \left(\frac{m}{\beta}\right) = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 - 4\left(\frac{m}{\beta}\right)} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{\beta m}{\gamma^2}\right)} \right\}$$

上式において質量が $m = \frac{\gamma^2}{4\beta}$ 以上になると判別式が負になってしまい、これまでの方法では解が導けないので、鉛直運動における速度正のケースは割愛する。

2.2 速度が負の場合

2.2.1 運動方程式

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \gamma v_y + \beta v_y^2 : \text{運動方程式} \dots\dots\dots (2.2-1)$$

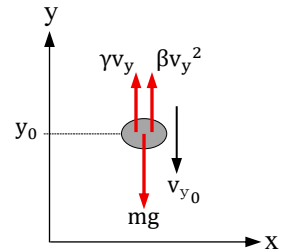
$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \left(\frac{\gamma}{m}\right)v_y + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_y^2 : \text{加速度} \dots\dots\dots (2.2-2)$$

m : 質量[kg]

v_x : 速度[m/s]

γ : 粘性抵抗係数[kg/s]

β : 慣性抵抗係数[kg/m]



2.2.2 速度

重力によって負方向の速度が増大するにつれ、粘性抵抗と慣性抵抗が正方向に増大する。終いには物体に作用するこれらの力は釣り合うこととなり、加速度がゼロとなって一定速度で運動を継続する。最終的に一定となった速度は「終端速度」と呼ばれ、次のように表される。

$$-mg - \gamma v_{yf} + \beta v_{yf}^2 = 0 : \text{力の釣り合い}$$

$$v_{yf} = \frac{1}{2\beta} \left\{ \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\beta mg} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right\}$$

$v_{yf} < 0$ でなければならず、 $1 \leq \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}$ なので、平方根の $\pm$ 符号は $-$ が選択される。

$$v_{yf} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) : \text{終端速度} \dots\dots\dots (2.2-3)$$

加速度(2.2-2)を変形して時間積分し、速度を求める。

$$\frac{dv_y}{dt} = - \left\{ g + \left(\frac{\gamma}{m} \right) v_y - \left(\frac{\beta}{m} \right) v_y^2 \right\}$$

$$\frac{1}{g + \left(\frac{\gamma}{m} \right) v_y - \left(\frac{\beta}{m} \right) v_y^2} \frac{dv_y}{dt} = -1$$

左辺の分母が2次式で積分困難なので、1次式に部分分数分解する。

$$\frac{1}{g + \left(\frac{\gamma}{m} \right) v_y - \left(\frac{\beta}{m} \right) v_y^2} = \frac{1}{f} \left(\frac{c}{a + v_y} + \frac{d}{b - v_y} \right)$$

これを通分した分母は、

$$f(a + v_y)(b - v_y) = fab - f(a - b)v_y - fv_y^2 = g + \left(\frac{\gamma}{m}\right)v_y - \left(\frac{\beta}{m}\right)v_y^2$$

よって、下記の3式が成り立つ必要がある。

$$fab = g$$

$$f(a - b) = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)$$

$$f = \left(\frac{\beta}{m}\right)$$

上記を連立して解いて、

$$\left(\frac{\beta}{m}\right)(a - b) = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)$$

$$a - b = -\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

$$b = a + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

$$\left(\frac{\beta}{m}\right)a \left\{ a + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \right\} = g$$

$$a^2 + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)a - \left(\frac{mg}{\beta}\right) = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + 4\frac{mg}{\beta}} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right)$$

次に、通分した分子は、

$$d(a + v_y) + c(b - v_y) = da + cb + (d - c)v_y = 1$$

よって、下記の2式が成り立つ必要がある。

$$da + cb = 1$$

$$d - c = 0$$

上記を連立して解いて、

$$d = c$$

$$ca + cb = 1$$

$$c = \frac{1}{a + b} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\pm \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right)} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \frac{1}{\left(\pm \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right)}$$

$$d = c = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \frac{1}{\left(\pm \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right)}$$

求めた係数を元の部分分数式に戻すと煩雑になるので、そのまま積分する。また、 $d = c$ なので d を c と置き換える。

$$\int \frac{1}{f} \left(\frac{c}{a + v_y} + \frac{c}{b - v_y} \right) dv_y = - \int dt \dots\dots\dots (2.2-4)$$

この積分を実行して、

$$\frac{c}{f} \{ \ln(a + v_y) - \ln(b - v_y) \} = -t + C$$

$$\frac{c}{f} \ln \left(\frac{a + v_y}{b - v_y} \right) = -t + C \dots\dots\dots (2.2-5)$$

C : 積分定数

$t=0$ の初期条件を代入して、

$$C = \frac{c}{f} \ln \left(\frac{a + v_{y0}}{b - v_{y0}} \right) : \text{積分定数} \dots\dots\dots (2.2-6)$$

積分定数を代入して整理し、速度を求める。

$$\frac{c}{f} \ln \left(\frac{a + v_y}{b - v_y} \right) = -t + \frac{c}{f} \ln \left(\frac{a + v_{y0}}{b - v_{y0}} \right)$$

$$\ln \left(\frac{a + v_y}{b - v_y} \right) - \ln \left(\frac{a + v_{y0}}{b - v_{y0}} \right) = -\frac{f}{c} t$$

$$\ln \left\{ \frac{(a + v_y)(b - v_{y0})}{(b - v_y)(a + v_{y0})} \right\} = -\frac{f}{c} t$$

$$\frac{(a + v_y)(b - v_{y0})}{(b - v_y)(a + v_{y0})} = e^{-\frac{f}{c} t}$$

$$(a + v_y)(b - v_{y0}) = (b - v_y)(a + v_{y0}) e^{-\frac{f}{c} t}$$

$$(ab - av_{y0} + bv_y - v_{y0}v_y) = (ab + bv_{y0} - av_y - v_{y0}v_y) e^{-\frac{f}{c} t}$$

$$\left\{ (b - v_{y0}) + (a + v_{y0}) e^{-\frac{f}{c} t} \right\} v_y = -a(b - v_{y0}) + b(a + v_{y0}) e^{-\frac{f}{c} t}$$

$$v_y = - \frac{a(b - v_{y0}) - b(a + v_{y0}) e^{-\frac{f}{c} t}}{\left\{ (b - v_{y0}) + (a + v_{y0}) e^{-\frac{f}{c} t} \right\}} : \text{鉛直速度} \dots\dots\dots (2.2-7)$$

上記速度の終端速度 ($t = \infty$) を求めると、

$$v_{yf} = -a = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right)$$

式(2.2-3)の終端速度と比較して、平方根の符号 $\pm$ は+でなければならない。

よって、部分分数の各係数は次のように表される。

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(-1 + \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right) \dots\dots\dots (2.2-8)$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right) \dots\dots\dots (2.2-9)$$

$$c = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}}} \dots\dots\dots (2.2-10)$$

$$f = \left(\frac{\beta}{m}\right) \dots\dots\dots (2.2-11)$$

2.2.3 位置

速度を積分して位置を求める。

速度の式(2.2-7)には分母分子に指数関数が入っているので、置換積分を利用する。

$$u = e^{-\frac{f}{c}t}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{f}{c}e^{-\frac{f}{c}t} = -\frac{f}{c}u$$

$$-\frac{c}{fu}du = dt$$

$$\begin{aligned} y &= \int v_y dt = - \int \left\{ \frac{a(b - v_{y0}) - b(a + v_{y0})u}{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u} \right\} \left(-\frac{c}{fu} du \right) = \int \frac{c}{fu} \left\{ \frac{a(b - v_{y0}) - b(a + v_{y0})u}{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u} \right\} du \\ &= \frac{c}{f} \int \frac{1}{u} \left\{ \frac{a(b - v_{y0})}{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u} \right\} du - \frac{c}{f} \int \left\{ \frac{b(a + v_{y0})}{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u} \right\} du \end{aligned}$$

右辺第1項は次のように部分分数に分解する。

$$\frac{1}{u} \left\{ \frac{a(b - v_{y0})}{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u} \right\} = \frac{p}{u} + \frac{q}{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u}$$

分子を通分して、

$$p\{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})u\} + qu = p(b - v_{y0}) + \{p(a + v_{y0}) + q\}u = a(b - v_{y0})$$

よって、次の2式が成立しなければならない。

$$p(b - v_{y0}) = a(b - v_{y0})$$

$$p(a + v_{y0}) + q = 0$$

上の式を連立して解いて、

$$p = a \frac{(b - v_{y_0})}{(b - v_{y_0})} = a$$

$$q = -a(a + v_{y_0})$$

部分分数の式に代入して、

$$\frac{1}{u} \left\{ \frac{a(b - v_{y_0})}{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u} \right\} = \frac{a}{u} - \frac{a(a + v_{y_0})}{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u}$$

よって、積分は次のように表される。

$$\begin{aligned} y &= \frac{ac}{f} \int \frac{1}{u} du - \frac{ac}{f} \int \left\{ \frac{(a + v_{y_0})}{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u} \right\} du - \frac{bc}{f} \int \left\{ \frac{(a + v_{y_0})}{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u} \right\} du \\ &= \frac{ac}{f} \int \frac{1}{u} du - \frac{c(a + b)}{f} (a + v_{y_0}) \int \left\{ \frac{1}{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u} \right\} du \\ &= \frac{ac}{f} \ln(u) - \frac{c(a + b)}{f} (a + v_{y_0}) \frac{1}{(a + v_{y_0})} \ln\{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u\} + C \\ &= \frac{ac}{f} \ln(u) - \frac{c(a + b)}{f} \ln\{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})u\} + C \end{aligned}$$

C : 積分定数

u を元に戻して

$$\begin{aligned} y &= \frac{ac}{f} \ln\left(e^{-\frac{f}{c}t}\right) - \frac{c(a + b)}{f} \ln\{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})e^{-\frac{f}{c}t}\} + C \\ &= -at - \frac{c(a + b)}{f} \ln\{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})e^{-\frac{f}{c}t}\} + C \dots\dots\dots (2.2-12) \end{aligned}$$

t=0 の初期条件を代入して、

$$y_0 = -\frac{c(a + b)}{f} \ln(a + b) + C$$

$$C = y_0 + \frac{c(a + b)}{f} \ln(a + b) : \text{積分定数} \dots\dots\dots (2.2-13)$$

積分結果(2.2-12)式に積分定数(2.2-13)式を代入して、

$$y = -at - \frac{c(a + b)}{f} \ln\{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})e^{-\frac{f}{c}t}\} + y_0 + \frac{c(a + b)}{f} \ln(a + b)$$

$$y = y_0 - at - \frac{c(a + b)}{f} \ln\left\{ \frac{(b - v_{y_0}) + (a + v_{y_0})e^{-\frac{f}{c}t}}{(a + b)} \right\} : \text{鉛直位置} \dots\dots\dots (2.2-14)$$

ここで、

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right)$$

$$c = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}}$$

$$f = \left(\frac{\beta}{m}\right)$$

2.2.4 最終値

$t \rightarrow \infty$ の最終条件を式 (2.2-7) および式 (2.2-14) に代入して、

$$v_{y_f} = -a = -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right) : \text{最終鉛直速度} \cdots \cdots \cdots (2.2-13)$$

$$y_f = -\infty : \text{最終鉛直位置} \cdots \cdots \cdots (2.2-14)$$

3 計算例

水平運動は次のように表される。

$$\frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x - \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2 : \text{水平加速度 (初速が正の場合)} \dots\dots\dots (1.1-2)$$

$$v_x = \frac{v_{x0}e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{1 + \frac{\beta}{\gamma}v_{x0}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)} : \text{水平速度 (初速が正の場合)} \dots\dots\dots (1.1-7)$$

$$x = x_0 + \frac{m}{\beta} \ln \left\{ 1 + \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) \right\} : \text{水平位置 (初速が正の場合)} \dots\dots\dots (1.1-10)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2 : \text{水平加速度 (初速が負の場合)} \dots\dots\dots (1.2-2)$$

$$v_x = \frac{v_{x0}e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{1 - \frac{\beta}{\gamma}v_{x0}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)} : \text{水平速度 (初速が負の場合)} \dots\dots\dots (1.2-7)$$

$$x = x_0 - \frac{m}{\beta} \ln \left\{ 1 - \frac{\beta}{\gamma} v_{x0} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) \right\} : \text{水平位置 (初速が負の場合)} \dots\dots\dots (1.2-10)$$

従って、符号の正負をまとめた運動は次のように表される。

$$\frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{m}\right)v_x - \text{sign}(v_{x0})\left(\frac{\beta}{m}\right)v_x^2 : \text{水平加速度}$$

$$v_x = \frac{v_{x0}e^{-\frac{\gamma}{m}t}}{1 + \text{sign}(v_{x0})\frac{\beta}{\gamma}v_{x0}\left\{1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right\}} : \text{水平速度}$$

$$x = x_0 + \text{sign}(v_{x0})\frac{m}{\beta} \ln \left\{ 1 + \text{sign}(v_{x0})\frac{\beta}{\gamma}v_{x0}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \right\} : \text{水平位置}$$

また、鉛直運動は次のように表される。

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \left(\frac{\gamma}{m}\right)v_y + \left(\frac{\beta}{m}\right)v_y^2 : \text{鉛直加速度 (初速が負の場合)} \dots\dots\dots (2.2-2)$$

$$v_y = -\frac{a(b - v_{y0}) - b(a + v_{y0})e^{-\frac{f}{c}t}}{\left\{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})e^{-\frac{f}{c}t}\right\}} : \text{鉛直速度 (初速が負の場合)} \dots\dots\dots (2.2-7)$$

$$y = y_0 - at - \frac{c(a + b)}{f} \ln \left\{ \frac{(b - v_{y0}) + (a + v_{y0})e^{-\frac{f}{c}t}}{(a + b)} \right\} : \text{鉛直位置 (初速が負の場合)} \dots\dots\dots (2.2-13)$$

ここで、

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(-1 + \sqrt{1 + 4\frac{\beta mg}{\gamma^2}}\right) \dots\dots\dots (2.2-8)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) \dots\dots\dots (2.2-9)$$

$$c = \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}} \dots\dots\dots (2.2-10)$$

$$f = \left(\frac{\beta}{m} \right) \dots\dots\dots (2.2-11)$$

$$\begin{aligned} \frac{c(a+b)}{f} &= \frac{\left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\beta mg}{\gamma^2}} \right) \right\}}{\left(\frac{\beta}{m} \right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{\beta mg}{\gamma^2} \right)}} \left\{ \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\beta mg}{\gamma^2} \right)} \right\}}{\left(\frac{\beta}{m} \right)} = \frac{m}{\beta} \end{aligned}$$

運動方程式の数値積分結果と上記で導出した解析解の結果が一致することを確認し、下記の「粘性抵抗と慣性抵抗を受ける物体の運動(Excel)」に示す。

なお、鉛直運動で速度が正(上向き)の場合は解析解が得られなかったが、数値積分なら簡単に求められるので、その結果を併せて示す。

<http://ss880966.stars.ne.jp/che/index.html>