

3.5 座標回転の補正 (コーニング補正)

慣性座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、回転座標系の回転を表す回転ベクトルは式(2.2-21)に示した回転ベクトルの微係数を積分して下記の式で表される。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \int \dot{\boldsymbol{\theta}} dt = \int \left[\boldsymbol{\omega}_B + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_B) + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) \{ \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}_B) \} \right] dt \dots\dots\dots (3.5-1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B$: 慣性系に対する回転座標系の回転角速度ベクトル

ところで、ストラップダウン型の慣性航法においては、ジャイロは回転体に固定されているので、常に回転座標系の各軸方向の角速度を積分した下記で表される値を出力する。

$$\boldsymbol{\theta}_B = \begin{pmatrix} \int \omega_{x_B} dt \\ \int \omega_{y_B} dt \\ \int \omega_{z_B} dt \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.5-2)$$

よって、ジャイロで計測できない式(3.5-1)の第2項以降のノンコミュタティビティ・レートは、このジャイロ出力信号を用いて計算によって補正しなければならない。このため、回転座標系が一定と仮定できる微小時間毎に周期的にジャイロ出力信号を読み取り、それを用いて回転座標系の回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_B$ を推定して式(3.5-1)の積分値を求める必要がある。この微小時間を Δt とすれば、ジャイロ出力信号は下記で表される。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} = \int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \dots\dots\dots (3.5-3)$$

このとき、回転座標系の角速度は、現時点(T)と Δt 前の時点(T- Δt)の間の平均値として下記で近似される。

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-4)$$

また、式(3.5-1)の回転ベクトルの微小時間 Δt 間の積分は次式で表される。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^T \left[\boldsymbol{\omega}_{B(t)} + \frac{1}{2}(\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) + \frac{1}{\Delta \theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta \theta_{(t)} \sin \Delta \theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta \theta_{(t)})} \right) \{ \Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times (\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) \} \right] dt$$

ここで $\Delta \theta_{(t)} \ll 1$ とすると、上式の第3項の係数は $\frac{1}{\Delta \theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta \theta_{(t)} \sin \Delta \theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta \theta_{(t)})} \right) \doteq \frac{1}{12}$ であるから

第2項と比較して $\frac{1}{2} \Delta \theta \gg \frac{1}{12} \Delta \theta^2$ で微小なので省略でき、上記の回転ベクトルの積分は下記で求めることができる。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt + \frac{1}{2} \int_{T-\Delta t}^T (\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) dt \dots\dots\dots (3.5-5)$$

さらに、上記の第2項における $\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)}$ は下記のようにジャイロ出力信号を用いて近似できる。

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \doteq \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(t)} = \int \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \dots\dots\dots (3.5-6)$$

よって、第2項は下記のようにシンプソンの積分公式を用いて求められる。

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{(T)} &= \frac{1}{2} \int_{T-\Delta t}^T (\Delta \boldsymbol{\theta}_{(t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)}) dt \doteq \frac{1}{2} \int_{T-\Delta t}^T \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{6} \left[\left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t)} \right\} + 4 \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \\ &= \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.5-7) \end{aligned}$$

従って、式(3.5-5)は式(3.5-6)及び式(3.5-7)を代入して下記のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}_{(T)} &= \int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \left(\int_{T-\Delta t}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \right) \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \\ &= \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \Delta \boldsymbol{\theta}_{B(T)} \times \boldsymbol{\omega}_{B(T)} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.5-8) \end{aligned}$$

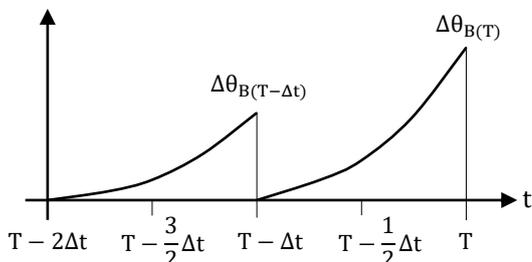
このように回転ベクトルは、ジャイロで計測できないノンコミュタティビティ・レートの第2項のみ補正することで求めることができる。この補正は一般にコーニング補正と呼ばれ、ジャイロ出力信号のサンプリング周期の取り方によっていくつかの方法が採られる。

(1) 姿勢更新周期と同じ周期で読み取ったジャイロ信号を用いたコーニング補正

姿勢更新周期を Δt としたとき、回転座標系の角速度は、現時点 (T) と Δt 前の時点 ($T - \Delta t$) でのジャイロ出力信号を用いて下記のように表される。

$$\omega_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \dots\dots\dots (3.5-9)$$

$$\omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-10)$$



上記の Δt 間の平均角速度を用いると、 Δt 前の時点 ($T - \Delta t$) から現時点 (T) までの角速度は下記のように近似して表すことができる。

$$\begin{aligned} \omega_{B(t)} &= \omega_{B(T-\Delta t)} + \dot{\omega}_{B(T-\Delta t)}\{t - (T - \Delta t)\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \omega_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)} + \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \frac{1}{\Delta t} \left\{ \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} - \omega_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)} \right\} (t - T + \Delta t) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \{ \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \Delta\theta_{B(T)} \} + \frac{t - T + \Delta t}{\Delta t^2} \{ \Delta\theta_{B(T)} - \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} - \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} + \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-11) \end{aligned}$$

これを積分して

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{B(t)} &= \int_{T-\Delta t}^t \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} - \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} + \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2\Delta t} + \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\Delta t} - \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t \right) \Delta\theta_{B(T)} \Big|_{T-\Delta t}^t \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2\Delta t} + \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t - \frac{T-\Delta t}{2} + \frac{(T-\Delta t)^2}{2\Delta t} - \frac{(T-\Delta t)^2}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\Delta t} - \frac{T-\Delta t}{\Delta t} t - \frac{T-\Delta t}{2} - \frac{(T-\Delta t)^2}{2\Delta t} + \frac{(T-\Delta t)^2}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \\ &= \frac{t-T+\Delta t}{2\Delta t} \left(1 - \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{t-T+\Delta t}{2\Delta t} \left(1 + \frac{t-T+\Delta t}{\Delta t} \right) \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-12) \end{aligned}$$

式(3.5-11)及び式(3.5-12)より

$$\omega_{B(T)} = -\frac{1}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-13)$$

$$\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{8} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8} \Delta\theta_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-14)$$

従って、回転ベクトルは式(3.5-8)に式(3.5-3)のジャイロ出力信号、式(3.5-13)及び式(3.5-14)を代入して下記のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{(T)} &= \Delta\theta_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \left(\frac{1}{8} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8} \Delta\theta_{B(T)} \right) \times \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \Delta\theta_{B(T)} \times \left(-\frac{1}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right) \right\} \right] \\ &= \Delta\theta_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12} \left[\frac{4}{8\Delta t} \{ \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times \Delta\theta_{B(T)} \} - \frac{1}{2\Delta t} \{ \Delta\theta_{B(T)} \times \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \} \right] \\ &= \Delta\theta_{B(T)} + \frac{1}{12} \{ \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times \Delta\theta_{B(T)} \} \dots\dots\dots (3.5-15) \end{aligned}$$

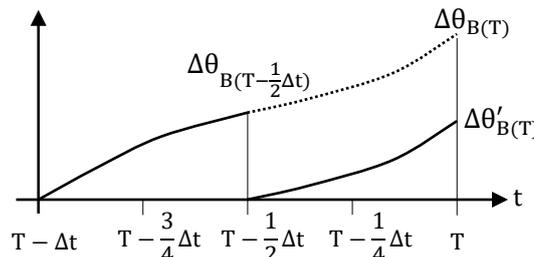
(2) 姿勢更新周期の2倍の周期で読み取ったジャイロ信号を用いたコーニング補正

姿勢更新周期を Δt としたとき、回転座標系の角速度は、現時点 (T) でのジャイロ出力信号 $\Delta\theta'_{B(T)}$ と $\frac{1}{2}\Delta t$ 前の時点 ($T - \frac{1}{2}\Delta t$) でのジャイロ出力信号 $\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}$ を用いて下

記のように表される。

$$\omega_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \dots\dots\dots (3.5-16)$$

$$\omega_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} = \frac{2}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-17)$$



上記の $\frac{1}{2}\Delta t$ 間の平均角速度を用いると、 $\frac{1}{2}\Delta t$ 前の時点 ($T - \frac{1}{2}\Delta t$) から現時点 (T) までの角速度は下記のように近似して表すことができる。

$$\begin{aligned} \omega_{B(t)} &= \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \dot{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \left\{ t - \left(T - \frac{1}{2}\Delta t \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \omega_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} + \omega_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} \right\} + \frac{2}{\Delta t} \left\{ \omega_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} - \omega_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} \right\} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right\} + \frac{4}{\Delta t^2} \left\{ \Delta\theta'_{B(T)} - \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1 - \frac{4}{\Delta t} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \right\} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \left\{ 1 + \frac{4}{\Delta t} \left(t - T + \frac{1}{2}\Delta t \right) \right\} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-18) \end{aligned}$$

上式より

$$\omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-19)$$

$$\omega_{B(T)} = -\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{3}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-20)$$

また、 Δt 間のジャイロ出力信号の角度増分は下記となるから

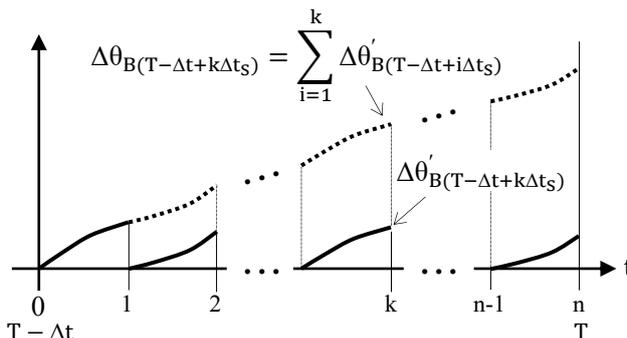
$$\Delta\theta_{B(T)} = \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \dots\dots\dots (3.5-21)$$

従って、回転ベクトルは式(3.5-8)に式(3.5-19)、式(3.5-20)及び式(3.5-21)を代入して下記のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{(T)} &= \left(\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right) + \frac{\Delta t}{12} \left[4 \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times \left(\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right) \times \left(-\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{3}{\Delta t} \Delta\theta'_{B(T)} \right) \right\} \right] \\ &= \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\theta'_{B(T)} \right\} + \frac{2}{3} \left\{ \Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times \Delta\theta'_{B(T)} \right\} \dots\dots\dots (3.5-22) \end{aligned}$$

(3) 姿勢更新周期の数倍の周期で読み取ったジャイロ信号を用いたコーニング補正

慣性センサ・ユニット自身がプロセッサを内蔵してドリフト補償等のデータ処理を行う方式の場合、航法計算における姿勢更新周期より早い周期でデータ処理を行うことがある。特に、衝撃からセンサを守るためにショックマウントを介してセンサブロックを取り付けているような場合で、センサブロックが何らかの原因で航法計算における姿勢更新周期より早い周期でコーニング運動する可能性がある場合には、このコーニング周期より早い周期でコーニング補正演算を行う必要がある。



ジャイロ信号のサンプリング周期 Δt_s を姿勢更新周期 Δt の n 倍の周期としたとき、現時点 (T) から Δt 前の時点 (T- Δt) で決定された姿勢を基準として次の姿勢更新タイミングとなる現時点 (T) までの回転ベクトルを求める。

まず、回転座標系での回転角速度及びそれを積分した角度増分は、時点 (T- Δt) からサンプリング周期 Δt_s の整数倍 (k) 経過した時点で下記のように表すことができる。

$$\omega_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} = \frac{1}{\Delta t_s} \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} \quad \dots\dots\dots (3.5-23)$$

$$\Delta \theta_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} \equiv \int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t+k\Delta t_s} \omega_{B(t)} dt = \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \quad \dots\dots\dots (3.5-24)$$

これらを式 (3.5-8) に代入して

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{(T-\Delta t+k\Delta t_s)} &= \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \{ \Delta \theta_{(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \times \Delta t_s \omega_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \\ &= \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \{ \Delta \theta_{(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \times \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \quad \dots\dots\dots (3.5-25) \end{aligned}$$

従って、回転ベクトルは上式を下記の漸化式に書き換えて求めることができる。

$$\Delta \theta_i = \{ \Delta \theta_{i-1} + \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} + \frac{1}{2} [\{ \Delta \theta_{i-1} + \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \times \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)}] \quad \dots\dots\dots (3.5-26)$$

ここで、 $\Delta \theta_0 = 0$

$$i = 1 \sim n$$

$$n = \frac{\Delta t}{\Delta t_s}$$

また、コーニング補正項における回転ベクトル $\Delta \theta_{(t)}$ を式 (3.5-8) と同様に、ジャイロ出力信号を用いて近似すると下記で求めることができる。

$$\Delta \theta_{(T)} = \sum_{i=1}^n \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\{ \sum_{i=1}^k \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_s)} \} \times \Delta \theta'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_s)}] \quad \dots\dots\dots (3.5-27)$$

3.6 姿勢計算誤差及びその改良法

3.6.1 姿勢計算誤差の表現

基準座標系Iを(o-x, y, z)とし、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、基準座標系から見た回転座標系の方向余弦マトリクス及び四元数を下記のように表す。

$$D_B^I = \begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-1)$$

$$Q_B^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-2)$$

また、航法計算によって得られた誤差を含んでいる姿勢を下記のように表す。

$$\tilde{D}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B & \tilde{y}_B & \tilde{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_{13} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \tilde{d}_{23} \\ \tilde{d}_{31} & \tilde{d}_{32} & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-3)$$

$$\tilde{Q}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.1-4)$$

このとき、姿勢誤差は下記の3種類の誤差で表現される。

- ・ スケール誤差
- ・ スキュー誤差
- ・ ドリフト誤差

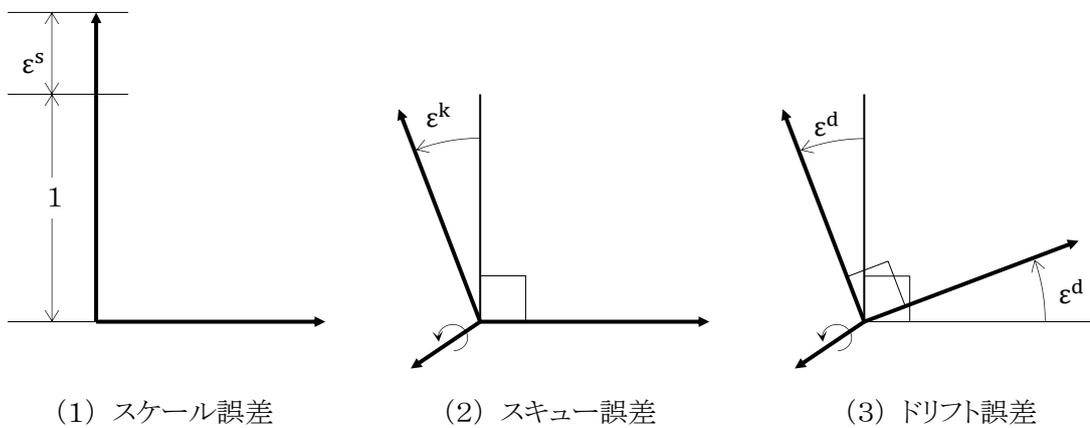


図3.6.1-1 姿勢計算誤差

(1) スケール誤差

回転座標系の各軸単位ベクトル及び四元数の大きさは1でなければならないが、この1からずれをスケール誤差と呼び、下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{D_x}^s &= |\tilde{x}_B| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{11}^2 + \tilde{d}_{21}^2 + \tilde{d}_{31}^2} - 1 \\ \epsilon_{D_y}^s &= |\tilde{y}_B| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{12}^2 + \tilde{d}_{22}^2 + \tilde{d}_{32}^2} - 1 \\ \epsilon_{D_z}^s &= |\tilde{z}_B| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{13}^2 + \tilde{d}_{23}^2 + \tilde{d}_{33}^2} - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6.1-5)$$

ここで平方根の近似解は $x = \sqrt{N}$ より、 $f(x) = x^2 - N = 0$ にニュートン・ラプソンの逐次近似法を適用して次式で表される。

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - N}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{x_{n-1}} + x_{n-1} \right)$$

よって、式(3.6.1-5)は次式で近似される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{d}_{11}^2 + \tilde{d}_{21}^2 + \tilde{d}_{31}^2}{1} + 1 \right) - 1 \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{d}_{11}^2 + \tilde{d}_{21}^2 + \tilde{d}_{31}^2 - 1) \\ \varepsilon_{D_y}^s &= \frac{1}{2} (\tilde{d}_{12}^2 + \tilde{d}_{22}^2 + \tilde{d}_{32}^2 - 1) \\ \varepsilon_{D_z}^s &= \frac{1}{2} (\tilde{d}_{13}^2 + \tilde{d}_{23}^2 + \tilde{d}_{33}^2 - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6.1-6)$$

同様に、四元数のスケール誤差は下記で表される。

$$\varepsilon_Q^s = \sqrt{\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2} - 1 = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - 1) \dots\dots\dots(3.6.1-7)$$

ところで、四元数を用いて方向余弦マトリクスは式(3.4-13)のように表せるから、これを式(3.6.1-5)に代入すると、方向余弦マトリクスと同様のスケール誤差が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^s &= \sqrt{(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2)^2 + \{2(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_0\tilde{q}_3)\}^2 + \{2(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 - \tilde{q}_0\tilde{q}_2)\}^2} - 1 \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\tilde{q}_0^4 + \tilde{q}_1^4 + \tilde{q}_2^4 + \tilde{q}_3^4 + \tilde{q}_0^2(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2) + \tilde{q}_1^2(\tilde{q}_0^2 - \tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_3^2) \\ &\quad - \tilde{q}_2^2(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_3^2) - \tilde{q}_3^2(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2) \\ &+ 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2) + 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 - 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2) \end{aligned} \right\} - 1 \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\tilde{q}_0^4 + \tilde{q}_1^4 + \tilde{q}_2^4 + \tilde{q}_3^4 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_1^2 - 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2 - 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2 - 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 - 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 \\ &+ 2\tilde{q}_2^2\tilde{q}_3^2 + 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2) + 4(\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 - 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2) \end{aligned} \right\} - 1 \\ &= \sqrt{\tilde{q}_0^4 + \tilde{q}_1^4 + \tilde{q}_2^4 + \tilde{q}_3^4 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_1^2 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_0^2\tilde{q}_3^2 + 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_2^2 + 2\tilde{q}_1^2\tilde{q}_3^2 + 2\tilde{q}_2^2\tilde{q}_3^2} - 1 \\ &= \sqrt{(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2)^2} - 1 = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - 1) \end{aligned}$$

他の軸も同様に求めると、それらは全て等しく、式(3.6.1-7)と同じ下記で表される。

$$\varepsilon_{Q_x}^s = \varepsilon_{Q_y}^s = \varepsilon_{Q_z}^s = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 - 1) \dots\dots\dots(3.6.1-8)$$

(2) スキュー誤差

回転座標系の各軸単位ベクトルは互いに直交していなければならないが、この直交条件からのずれをスキュー誤差と呼び、下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{D_x}^k &= \sin^{-1}(\tilde{y}_B \cdot \tilde{z}_B) = \sin^{-1}(\tilde{d}_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}\tilde{d}_{33}) \cong \tilde{d}_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}\tilde{d}_{33} \\ \varepsilon_{D_y}^k &= \sin^{-1}(\tilde{z}_B \cdot \tilde{x}_B) = \sin^{-1}(\tilde{d}_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}\tilde{d}_{31}) \cong \tilde{d}_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}\tilde{d}_{31} \\ \varepsilon_{D_z}^k &= \sin^{-1}(\tilde{x}_B \cdot \tilde{y}_B) = \sin^{-1}(\tilde{d}_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}\tilde{d}_{32}) \cong \tilde{d}_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}\tilde{d}_{32} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.6.1-9)$$

四元数は1つのベクトル(オイラー軸)しか持たないので、スキュー誤差は発生しない。

$$\varepsilon_{Q_x}^k = \varepsilon_{Q_y}^k = \varepsilon_{Q_z}^k = 0 \dots\dots\dots(3.6.1-10)$$

(3) ドリフト誤差

計算して得られた姿勢と真の姿勢との間に回転角が存在する場合、これをドリフト誤差と呼び、下記のように表される。

$$\mathbf{D}_B^B = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \tilde{\mathbf{D}}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{x}_B & \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{x}_B & \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{x}_B \\ \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{y}_B & \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{y}_B & \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{y}_B \\ \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{z}_B & \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{z}_B & \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{z}_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{D_z}^d & \varepsilon_{D_y}^d \\ \varepsilon_{D_z}^d & 1 & -\varepsilon_{D_x}^d \\ -\varepsilon_{D_y}^d & \varepsilon_{D_x}^d & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.6.1-11)$$

としたとき、ドリフト誤差は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{D_x}^d &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{z}_B - \tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{y}_B) = \frac{1}{2}(\tilde{d}_{12}d_{13} - d_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}d_{23} - d_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}d_{33} - d_{32}\tilde{d}_{33}) \\ \varepsilon_{D_y}^d &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{z}}_B \cdot \mathbf{x}_B - \tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{z}_B) = \frac{1}{2}(\tilde{d}_{13}d_{11} - d_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}d_{21} - d_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}d_{31} - d_{33}\tilde{d}_{31}) \\ \varepsilon_{D_z}^d &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}_B \cdot \mathbf{y}_B - \tilde{\mathbf{y}}_B \cdot \mathbf{x}_B) = \frac{1}{2}(\tilde{d}_{11}d_{12} - d_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}d_{22} - d_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}d_{32} - d_{31}\tilde{d}_{32}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.6.1-12)$$

四元数のドリフト誤差は、式(3.6.1-11)と同様な回転を表す四元数を以下のように定義して

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B^B &= (\mathbf{Q}_B^I)^* \otimes \tilde{\mathbf{Q}}_B^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & (q_1 \ q_2 \ q_3) \\ -\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} & q_0 1 - \left[\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \right] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0\tilde{q}_0 + q_1\tilde{q}_1 + q_2\tilde{q}_2 + q_3\tilde{q}_3 \\ q_0\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_0 - q_2\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_2 \\ q_0\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_0 - q_3\tilde{q}_1 + q_1\tilde{q}_3 \\ q_0\tilde{q}_3 - q_3\tilde{q}_0 - q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{q}_1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \frac{\varepsilon_Q^d}{2} + \sin \frac{\varepsilon_Q^d}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_Q^d \\ \varepsilon_{Q_x}^d \\ \varepsilon_{Q_y}^d \\ \varepsilon_{Q_z}^d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d = \begin{pmatrix} \varepsilon_{Q_x}^d \\ \varepsilon_{Q_y}^d \\ \varepsilon_{Q_z}^d \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_Q^d = |\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d| = \sqrt{\varepsilon_{Q_x}^d{}^2 + \varepsilon_{Q_y}^d{}^2 + \varepsilon_{Q_z}^d{}^2}$$

上式において $\varepsilon_Q^d \ll 1$ であるから下記が成立する。

$$\frac{1}{\varepsilon_Q^d} \sin \frac{\varepsilon_Q^d}{2} \approx \frac{1}{\varepsilon_Q^d} \left\{ \frac{\varepsilon_Q^d}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\varepsilon_Q^d}{2} \right)^3 \right\} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_Q^d{}^2}{48} \approx \frac{1}{2}$$

従って、四元数のドリフト誤差は下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^d &= 2(q_0\tilde{q}_1 - q_1\tilde{q}_0 - q_2\tilde{q}_3 + q_3\tilde{q}_2) \\ \varepsilon_{Q_y}^d &= 2(q_0\tilde{q}_2 - q_2\tilde{q}_0 - q_3\tilde{q}_1 + q_1\tilde{q}_3) \\ \varepsilon_{Q_z}^d &= 2(q_0\tilde{q}_3 - q_3\tilde{q}_0 - q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{q}_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6.1-13)$$

3.6.2 打ち切り誤差

航法計算において、角度増分を用いて姿勢更新を行う際に角度増分の正弦及び余弦を求める必要があるが、正弦及び余弦の計算はテーラー級数に展開して有限次数で打ち切るため、打ち切り誤差が生ずる。

方向余弦マトリクス法では式(3.2-10)で姿勢が更新され、角度増分の正弦及び余弦を含む係数は式(3.2-11)及び式(3.2-12)で表される。また、四元数法では式(3.4-29)で姿勢が更新され、角度増分の正弦及び余弦を含む係数は式(3.4-30)及び式(3.4-31)で表される。これらは次数nで打ち切ると、無限次数まで求めたものに比較して下記の打ち切り誤差を持つ。

$$\varepsilon_{S_n} = s_n - s_\infty \dots\dots\dots(3.6.2-1)$$

$$\varepsilon_{C_n} = c_n - c_\infty \dots\dots\dots(3.6.2-2)$$

ここで、 s_n, c_n : 打ち切り次数 n まで求めた係数

s_∞, c_∞ : 無限次数まで求めた係数

(1) スケール誤差

方向余弦マトリクス法では、式(3.6.1-6)に式(3.2-10)の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を代入して、次数打ち切りによるスケール誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} \left[\{1 - c_n(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2)\}^2 + \{c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_y + s_n\Delta\theta_z\}^2 + \{c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_z - s_n\Delta\theta_y\}^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ c_n^2(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2)^2 + c_n^2\Delta\theta_x^2(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) + s_n^2(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) - 2c_n(\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \{c_n^2(\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) + s_n^2 - 2c_n\} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) (c_n^2\Delta\theta^2 + s_n^2 - 2c_n) \dots\dots\dots (3.6.2-3)\end{aligned}$$

上式において、次数 n を無限大とすると誤差はゼロとなるから下記が成り立つ。

$$c_\infty^2\Delta\theta^2 + s_\infty^2 - 2c_\infty = 0 \dots\dots\dots (3.6.2-4)$$

従って、式(3.6.2-3)に式(3.6.2-1)及び式(3.6.2-2)を代入し、さらに式(3.6.2-4)を代入した後で打ち切り誤差の高次項を省略すると

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \{ (c_\infty + \varepsilon c_n)^2\Delta\theta^2 + (s_\infty + \varepsilon s_n)^2 - 2(c_\infty + \varepsilon c_n) \} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \{ (c_\infty^2\Delta\theta^2 + s_\infty^2 - 2c_\infty) + 2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2s_\infty\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n + \varepsilon c_n^2\Delta\theta^2 + \varepsilon s_n^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) (2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2s_\infty\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n)\end{aligned}$$

さらに上式に式(3.2-11)及び式(3.2-12)を代入して高次項を省略すると

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D_x}^s &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \left(2 \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2} \varepsilon c_n \Delta\theta^2 + 2 \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \left\{ 2 \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2} + \dots\right)}{\Delta\theta^2} \varepsilon c_n \Delta\theta^2 + 2 \frac{\left(\Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \dots\right)}{\Delta\theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) \left\{ 2 \left(\frac{\Delta\theta^2}{2} - \dots\right) \varepsilon c_n + 2 \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{3!} + \dots\right) \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right\} \\ &= (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{D_y}^s &= (\Delta\theta_z^2 + \Delta\theta_x^2) (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{D_z}^s &= (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2) (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \dots\dots\dots (3.6.2-5)\end{aligned}$$

同様に、四元数法では式(3.6.1-8)に式(3.4-29)における更新マトリクス(推移マトリクス)に対応する式(3.4-28)の要素を代入して、次数打ち切りによるスケール誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Q_x}^s &= \varepsilon_{Q_y}^s = \varepsilon_{Q_z}^s = c_n^2 + s_n^2(\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2) - 1 = c_n^2 + s_n^2\Delta\theta^2 - 1 \\ &= (c_\infty + \varepsilon c_n)^2 + (s_\infty + \varepsilon s_n)^2\Delta\theta^2 - 1 \\ &= (c_\infty^2 + s_\infty^2\Delta\theta^2 - 1) + \varepsilon c_n^2 + \varepsilon s_n^2\Delta\theta^2 + 2c_\infty\varepsilon c_n + 2s_\infty\varepsilon s_n\Delta\theta^2 \\ &= 2c_\infty\varepsilon c_n + 2\frac{1}{\Delta\theta} s_\infty \varepsilon s_n \Delta\theta^2 = 2 \cos \frac{\Delta\theta}{2} \varepsilon c_n + 2 \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \varepsilon s_n \Delta\theta^2 \\ &= 2\varepsilon c_n + \varepsilon s_n \Delta\theta^2 \dots\dots\dots (3.6.2-6)\end{aligned}$$

(2) スキュー誤差

方向余弦マトリクス法では、式(3.6.1-9)に式(3.2-10)の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を代入して、

次数打ち切りによるスキュー誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^k &= (c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_x - s_n \Delta \theta_z)(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_x + s_n \Delta \theta_y) + \{1 - c_n(\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2)\}(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_y - s_n \Delta \theta_x) \\
 &\quad + (c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n \Delta \theta_x)\{1 - c_n(\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2)\} \\
 &= c_n^2 \Delta \theta_x^2 \Delta \theta_y \Delta \theta_z - s_n^2 \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n c_n \Delta \theta_x (\Delta \theta_y^2 - \Delta \theta_z^2) + c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_y - c_n^2 (\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2) \Delta \theta_z \Delta \theta_y \\
 &\quad - s_n \Delta \theta_x + s_n c_n \Delta \theta_x (\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2) + c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n \Delta \theta_x \\
 &\quad - c_n^2 (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2) \Delta \theta_y \Delta \theta_z - s_n c_n \Delta \theta_x (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2) \\
 &= -s_n^2 \Delta \theta_y \Delta \theta_z + 2c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z - c_n^2 (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2 + \Delta \theta_z^2) \Delta \theta_y \Delta \theta_z \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z (s_n^2 - 2c_n + c_n^2 \Delta \theta^2) \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \{(s_\infty + \varepsilon s_n)^2 - 2(c_\infty + \varepsilon c_n) + (c_\infty + \varepsilon c_n)^2 \Delta \theta^2\} \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \{(s_\infty^2 - 2c_\infty + c_\infty^2 \Delta \theta^2) + 2s_\infty \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n + 2c_\infty \varepsilon c_n \Delta \theta^2 + \varepsilon c_n^2 \Delta \theta^2\} \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z (2s_\infty \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n) \\
 &= -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \left(2 \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right) = -\Delta \theta_y \Delta \theta_z \left(2 \frac{\Delta \theta - \frac{\Delta \theta^3}{3!} + \dots}{\Delta \theta} \varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n \right) \\
 \varepsilon_{D_y}^k &= -2\Delta \theta_y \Delta \theta_z (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\
 \varepsilon_{D_z}^k &= -2\Delta \theta_x \Delta \theta_y (\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \left. \vphantom{\varepsilon_{D_y}^k}} \right\} \dots \dots \dots (3.6.2-7)
 \end{aligned}$$

四元数法ではスキュー誤差はない。

$$\varepsilon_{Q_x}^k = \varepsilon_{Q_y}^k = \varepsilon_{Q_z}^k = 0 \dots \dots \dots (3.6.2-8)$$

(3) ドリフト誤差

方向余弦マトリクス法では、式(3.6.1-12)に式(3.2-10)の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を次数 n 及び次数無限大として代入すると、打ち切り次数 n によるドリフト誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^d &= \frac{1}{2} [(c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_x - s_n \Delta \theta_z)(c_\infty \Delta \theta_z \Delta \theta_x + s_\infty \Delta \theta_y) - (c_\infty \Delta \theta_y \Delta \theta_x - s_\infty \Delta \theta_z)(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_x + s_n \Delta \theta_y) \\
 &\quad + \{1 - c_n(\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2)\}(c_\infty \Delta \theta_z \Delta \theta_y - s_\infty \Delta \theta_x) \\
 &\quad - \{1 - c_\infty(\Delta \theta_z^2 + \Delta \theta_x^2)\}(c_n \Delta \theta_z \Delta \theta_y \\
 &\quad - s_n \Delta \theta_x) + (c_n \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_n \Delta \theta_x)\{1 - c_\infty(\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2)\} \\
 &\quad - (c_\infty \Delta \theta_y \Delta \theta_z + s_\infty \Delta \theta_x)\{1 - c_n(\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2)\}] \\
 &= \Delta \theta_x \{s_n - s_\infty + \Delta \theta^2 (c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \dots \dots \dots (3.6.2-9)
 \end{aligned}$$

上式に式(3.6.2-1)および式(3.6.2-2)を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^d &= \Delta \theta_x [(s_\infty + \varepsilon s_n) - s_\infty + \Delta \theta^2 \{(c_\infty + \varepsilon c_n) s_\infty - (s_\infty + \varepsilon s_n) c_\infty\}] \\
 &= \Delta \theta_x (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 s_\infty \varepsilon c_n) \\
 &= \Delta \theta_x \left(\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \varepsilon c_n \right) = \Delta \theta_x \left(\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \frac{\Delta \theta - \frac{\Delta \theta^3}{3!} + \dots}{\Delta \theta} \varepsilon c_n \right) \\
 &= \Delta \theta_x (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \varepsilon c_n) \dots \dots \dots (3.6.2-10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_y}^d &= \Delta \theta_y \{s_n - s_\infty + \Delta \theta^2 (c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \\
 &= \Delta \theta_y (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \varepsilon c_n) \dots \dots \dots (3.6.2-11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{D_z}^d &= \Delta \theta_z \{s_n - s_\infty + \Delta \theta^2 (c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \\
 &= \Delta \theta_z (\varepsilon s_n + \Delta \theta^2 \varepsilon c_n) \dots \dots \dots (3.6.2-12)
 \end{aligned}$$

同様に、四元数法では式(3.6.1-13)に式(3.4-29)における更新マトリクス(推移マトリクス)に対応する式(3.4-28)の要素を次数n及び次数無限大として代入すると、打ち切り次数nによるドリフト誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^d &= 2(c_{\infty}\Delta\theta_x s_n - \Delta\theta_x s_{\infty} c_n - \Delta\theta_y s_{\infty}\Delta\theta_z s_n + \Delta\theta_z s_{\infty}\Delta\theta_y s_n) \\ &= 2\Delta\theta_x\{c_{\infty}s_n - s_{\infty}c_n\} \dots\dots\dots (3.6.2-13) \end{aligned}$$

上式に式(3.6.2-1)および式(3.6.2-2)を代入して整理し、さらに y, z についても同様に求めて、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Q_x}^d &= 2\Delta\theta_x\{c_{\infty}(s_{\infty} + \varepsilon s_n) - s_{\infty}(c_{\infty} + \varepsilon c_n)\} = 2\left\{\cos\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon s_n\Delta\theta_x - \frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon c_n\Delta\theta_x\right\} \\ &= \Delta\theta_x(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{Q_y}^d &= 2\Delta\theta_y\{c_{\infty}s_n - s_{\infty}c_n\} = \Delta\theta_y(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \\ \varepsilon_{Q_z}^d &= 2\Delta\theta_z\{c_{\infty}s_n - s_{\infty}c_n\} = \Delta\theta_z(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n) \end{aligned} \dots\dots\dots (3.6.2-14)$$

3.6.3 姿勢計算誤差の改良法

角度増分の正弦及び余弦の計算は、テーラー級数に展開して下記のように表される。

$$\sin \Delta\theta = \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} - \frac{\Delta\theta^7}{7!} + \dots \dots\dots (3.6.3-1)$$

$$\cos \Delta\theta = 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} - \frac{\Delta\theta^6}{6!} + \dots \dots\dots (3.6.3-2)$$

そこで、方向余弦マトリクス法の式(3.2-11)～(3.2-12)及び四元数法の式(3.4-30)～(3.4-31)は、上記Δθのn乗まで用いた場合をn次の近似次数とすると、下記のように表される。

表3.6.3-1 姿勢更新における近似係数

次数		0次	1次	2次	3次	4次	5次	6次
sin Δθ			Δθ		$-\frac{\Delta\theta^3}{3!}$		$\frac{\Delta\theta^5}{5!}$	
cos Δθ		1		$-\frac{\Delta\theta^2}{2!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{4!}$		$-\frac{\Delta\theta^6}{6!}$
方向余弦 マトリクス 法	$s_n = \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$		1		$-\frac{\Delta\theta^2}{3!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{5!}$	
	$c_n = \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2}$	0		$\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta\theta^2}{4!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{6!}$
四元数法	$s_n = \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta\theta^2}{2^3 \cdot 3!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{2^5 \cdot 5!}$	
	$c_n = \cos \frac{\Delta\theta}{2}$	1		$-\frac{\Delta\theta^2}{2^2 \cdot 2!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{2^4 \cdot 4!}$		$-\frac{\Delta\theta^6}{2^6 \cdot 6!}$

上記の表に示したようにn次で打ち切った場合は、3.6.2項に示した打ち切り誤差が発生する。このうち、スケール誤差は下記のように正規化することで除去でき、スキュー誤差は直交化することで除去できる。

$$\underline{x}_B = \frac{\tilde{x}_B}{|\tilde{x}_B|} = \frac{\tilde{x}_B}{\sqrt{\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B}} \doteq \frac{\tilde{x}_B}{\frac{1}{2}\{(\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B) + 1\}} = \frac{\tilde{x}_B}{1 + \frac{(\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B) - 1}{2}}$$

上式に $\frac{1}{1+\varepsilon} \doteq 1 - \varepsilon$ (但し、 $\varepsilon \ll 1$)を適用して

$$\underline{x}_B \doteq \left\{1 - \frac{(\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B) - 1}{2}\right\} \tilde{x}_B = \left\{\frac{3 - (\tilde{x}_B \cdot \tilde{x}_B)}{2}\right\} \tilde{x}_B \dots\dots\dots (3.6.3-3)$$

正規化した \underline{x}_B を求めたら \tilde{y}_B と直交化してから正規化して \underline{z}_B を求める。

$$\underline{z}_B = \frac{\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B}{|\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B|} = \left\{ \frac{3 - (\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B) \cdot (\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B)}{2} \right\} (\underline{x}_B \times \underline{\tilde{y}}_B) \dots\dots\dots (3.6.3-4)$$

$$\underline{y}_B = \underline{z}_B \times \underline{x}_B \dots\dots\dots (3.6.3-5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B^I &= \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{|\tilde{\mathbf{Q}}_B^I|} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\sqrt{\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2}} \doteq \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\frac{1}{2}(\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2 + 1)} \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_B^I \frac{3 - (\tilde{q}_0^2 + \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 + \tilde{q}_3^2)}{2} \dots\dots\dots (3.6.3-6) \end{aligned}$$

ドリフト誤差は、式(3.6.2-10)～(3.6.2-12)及び式(3.6.2-14)に示した打ち切り誤差が小さくなるように、上記の表に示した係数を調整することで改良することが出来る。

(1) 方向余弦マトリクス(参考)

方向余弦マトリクス法は式(3.6.2-9)のようにドリフト誤差が表されるから、これらを再掲すると、下記のように表される。

$$\varepsilon_{D_P}^d = \Delta\theta_P \{s_n - s_\infty + \Delta\theta^2(c_n s_\infty - s_n c_\infty)\} \dots\dots\dots (3.6.3-7)$$

ここで、P=x、y、z

上式で近似次数が2次の場合は、 s_n 、 s_∞ 及び c_∞ にそれぞれの式を代入し、その結果がゼロになるように c_n の式を下記のように決定すればよい。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^d &= \Delta\theta_P \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) - 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right\} \right] = 0 \\ c_n &= \frac{\left[-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) \right\} + 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right]}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{\Delta\theta^2}{30} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \dots} \doteq \frac{1}{3} \dots\dots\dots (3.6.3-8) \end{aligned}$$

同様に、近似次数が4次の場合は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^d &= \Delta\theta_P \left[\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right\} \right] = 0 \\ c_n &= \frac{\left[-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right) \right\} + \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots \right) \right]}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{7\Delta\theta^2}{60} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \dots} \doteq \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{30} \dots\dots\dots (3.6.3-9) \end{aligned}$$

さらに、近似次数が6次の場合は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^d &= \Delta\theta_P \left[\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} - \dots \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{120 \times 6} - \dots \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \dots \right) \right\} + \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{120 \times 6} - \dots \right)}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \dots \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{31\Delta\theta^4}{2520} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} - \dots} \doteq \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{840} \dots \dots \dots (3.6.3-10)$$

(2) 四元数

四元数法は式(3.6.2-13)のようにドリフト誤差が表されるから、これらを再掲すると、下記のように表される。

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \{ c_\infty s_n - s_\infty c_n \}, \quad P = x, y, z \dots \dots \dots (3.6.3-11)$$

上式で近似次数が2次の場合は、 s_n 、 s_∞ 及び c_∞ にそれぞれの式を代入し、その結果がゼロになるように c_n の式を下記のように決定すればよい。

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \dots \right) \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \dots \right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \dots \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \dots} = \frac{1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \dots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \dots} \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{12} \dots \dots \dots (3.6.3-12)$$

同様に、近似次数が4次の場合は

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \dots \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \dots \right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \dots \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \dots} = \frac{1 - \frac{\Delta\theta^2}{12} + \frac{\Delta\theta^4}{256} - \dots}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \dots} \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{480} \dots \dots \dots (3.6.3-13)$$

さらに、近似次数が6次の場合は

$$\varepsilon_{Q_P}^d = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 10 \times 12} + \dots \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 12 \times 14} + \dots \right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} \right) \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 10 \times 12} + \dots \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 12 \times 14} + \dots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{12} + \frac{\Delta\theta^4}{240} - \frac{3\Delta\theta^6}{384 \times 16 \times 7} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840 \times 12 \times 14} + \dots} \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{53760} \dots \dots \dots (3.6.3-14)$$

上記の近似係数を改良した結果をまとめて表3.6-2に示す。

表3.6.3-2 姿勢更新における近似係数の改良

次数		改良2次	改良4次	改良6次
方向余弦 マトリクス法 (参考)	$s_n = \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$	1	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{6}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120}$
	$c_n = \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{30}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{840}$
四元数法	$s_n = \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840}$
	$c_n = \cos \frac{\Delta\theta}{2}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{12}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{480}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{54760}$

3.6.4 姿勢誤差の評価

慣性航法で求めた姿勢には下記の誤差が含まれる。

- ☆ 観測値(角度増分)が持っている誤差
 - センサ誤差
 - 量子化誤差
- ☆ 更新計算における誤差
 - 打ち切り誤差
 - 切り捨て誤差
 - 丸め誤差
- ☆ 観測できないコーニングドリフトの補正残差

(1) センサ誤差

補足5.4項に衛星打上用大型ロケットにおける慣性センサ(IMU)の主要特性例を示す。

(2) 量子化誤差

ジャイロは角速度を積分し、それが一定の量に達したときに一つのパルスが生成され、そのパルスを積算することで角度積算値が得られる。量子化の過程で1パルスに満たない積分量は保持されるので、パルス出力値は下記の量子化誤差を持つ。

$$\varepsilon P = \pm \frac{P}{2} \dots\dots\dots (3.6.4-1)$$

ここで、P:パルスウェイト

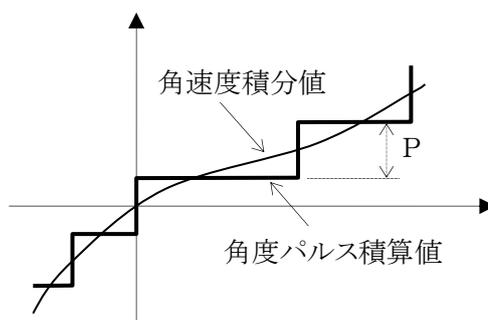


図3.6.4-1 量子化誤差

上記の量子化誤差を含んだパルス出力値は下記のように表される。

$$\theta_{Pi} = P_i + \varepsilon P_i \dots\dots\dots (3.6.4-2)$$

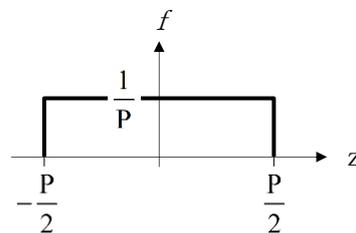
この量子化誤差は分布区間 $[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}]$ で下図に示したような確率密度関数を持った一様分布と考えることができるので、下記の統計量で表される。

$$E(\varepsilon P_i) = 0 \quad : \text{量子化誤差の平均}$$

$$E(\varepsilon P_i \varepsilon P_j) = \delta_{ij} \sigma^2 \quad : \text{量子化誤差の分散}$$

ここで、E:期待値オペレータ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$



また、この量子化誤差の分散は、下記で表される。

$$\sigma^2 = E(\varepsilon P_i^2) = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \{z^2 f(z)\} dz = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \left\{ z^2 \frac{1}{P} \right\} dz = \frac{z^3}{3P} \Big|_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} = \frac{2}{3P} \left(\frac{P}{2} \right)^3 = \frac{P^2}{12} \dots\dots\dots (3.6.4-3)$$

角度積算値は、上記の誤差を持ったパルスを積算するから、下記のように表される。

$$\theta = \sum_{i=1}^n (P_i + \varepsilon P_i) \dots\dots\dots (3.6.4-4)$$

$$\mu_\theta = E(\theta) = E\left(\sum_{i=1}^n (P_i + \varepsilon P_i) \right) = \sum_{i=1}^n E(P_i + \varepsilon P_i) = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n E(\varepsilon P_i) = \sum_{i=1}^n P_i \dots\dots\dots (3.6.4-5)$$

$$\begin{aligned}
 E(\theta - \mu_\theta)^2 &= E(\theta^2 - 2\mu_\theta\theta + \mu_\theta^2) = E(\theta^2) - 2\mu_\theta E(\theta) + E(\mu_\theta^2) = E(\theta^2) - 2\mu_\theta^2 + \mu_\theta^2 = E(\theta^2) - \mu_\theta^2 \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n (P_i + \varepsilon P_i)\right)^2 - \mu_\theta^2 = E\left\{\left(\sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2\right\} - \mu_\theta^2 \\
 &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^n P_i \sum_{i=1}^n \varepsilon P_i + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2\right\} - \mu_\theta^2 \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)^2 + 2E\left(\sum_{i=1}^n P_i \sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2 - \mu_\theta^2 \\
 &= E(\mu_\theta)^2 + 2\mu_\theta E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2 - \mu_\theta^2 = E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon P_i\right)^2 \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon P_i \varepsilon P_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(\varepsilon P_i \varepsilon P_j) = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = n\sigma^2 = n \frac{P^2}{12} \dots\dots\dots (3.6.4-6)
 \end{aligned}$$

従って、累積量子化誤差の標準偏差は下記で表される。

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\sqrt{12}} \sqrt{n} \dots\dots\dots (3.6.4-7)$$

この角度積算は慣性センサ・ユニット(IMU)の中で行われるので、IMU誤差(ランダムウォーク)と等価となり、上式のデータ数nは角度パルスの累積数であるから、IMU出力データには下記の累積量子化誤差が含まれることとなる。

$$\theta = \int_0^T |\omega| dt : \text{累積角度} \dots\dots\dots (3.6.4-8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\sqrt{12}} \sqrt{n} = \frac{P}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{\theta}{P}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{\theta P} : \text{累積量子化誤差} \dots\dots\dots (3.6.4-9)$$

ここで、 ω : 角速度

(3) 打ち切り誤差

姿勢更新における多項式の打ち切り誤差は、3.6.3項に示した改良が行われる。スケール誤差は式(3.6.3-3)～(3.6.3-5)及び式(3.6.3-6)のように正規化することで取り除くことができるが、スキュー誤差を取り除くための直交化は式(3.6.3-4)に示したように、3軸のうちの何れか1軸を基準として行うので、その基準とした軸がスキュー誤差を持っていると、ドリフト誤差と同じになってしまう。そこで方向余弦マトリクス法では、2.5.2(2)項のスキュー誤差式(3.6.2-7)と(3)項のドリフト誤差式(3.6.2-10)～(3.6.2-12)を合わせてドリフト誤差として評価する必要がある。

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{D_x}^d &= -2\Delta\theta_y \Delta\theta_z (\varepsilon_{S_n} - \varepsilon_{C_n}) + \Delta\theta_x (\varepsilon_{S_n} + \Delta\theta^2 \varepsilon_{C_n}) \\
 &= \varepsilon_{S_n} (\Delta\theta_x - 2\Delta\theta_y \Delta\theta_z) + \varepsilon_{C_n} (\Delta\theta^2 \Delta\theta_x + 2\Delta\theta_y \Delta\theta_z) \\
 \varepsilon_{D_y}^d &= \varepsilon_{S_n} (\Delta\theta_y - 2\Delta\theta_z \Delta\theta_x) + \varepsilon_{C_n} (\Delta\theta^2 \Delta\theta_y + 2\Delta\theta_z \Delta\theta_x) \\
 \varepsilon_{D_z}^d &= \varepsilon_{S_n} (\Delta\theta_z - 2\Delta\theta_x \Delta\theta_y) + \varepsilon_{C_n} (\Delta\theta^2 \Delta\theta_z + 2\Delta\theta_x \Delta\theta_y)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6.4-10)$$

表3.6.4-1に打ち切り誤差を示す。

表3.6.4-1 姿勢更新における打ち切り誤差

計算法	種類	改良2次	改良4次	改良6次	
方向余弦 マトリクス法 (参考)	スケール	$\frac{1}{6}(\Delta\theta_j^2 + \Delta\theta_k^2)$	$-\frac{\Delta\theta^2}{120}(\Delta\theta_j^2 + \Delta\theta_k^2)$	$\frac{\Delta\theta^4}{5040}(\Delta\theta_j^2 + \Delta\theta_k^2)$	
	スキュー	$-\frac{1}{3}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^2}{60}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^4}{2520}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	
	ドリフト	直交化 無し	$-\frac{\Delta\theta^4}{45}\Delta\theta_i$	$-\frac{\Delta\theta^6}{840}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{45360}\Delta\theta_i$
		直交化 有り(*)	$-\frac{\Delta\theta^4}{45}\Delta\theta_i - \frac{1}{3}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^6}{840}\Delta\theta_i + \frac{\Delta\theta^2}{60}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^6}{45360}\Delta\theta_i - \frac{\Delta\theta^4}{2520}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$
四元数法	スケール	$-\frac{\Delta\theta^2}{12}$	$\frac{\Delta\theta^4}{960}$	$\frac{\Delta\theta^6}{161280}$	
	スキュー	0	0	0	
	ドリフト	$-\frac{\Delta\theta^4}{720}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{53760}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^8}{11612160}\Delta\theta_i$	

(*)スキュー誤差を除去するために直交化した場合。

上記の表に示したように、近似係数の改良を図ってドリフト誤差を小さくすると、スケール誤差とスキュー誤差が悪化することとなる。スケール誤差は正規化することで除去できるが、方向余弦マトリクス法におけるスキュー誤差は、直交化して除去しようとすると式(3.6.4-10)に示したようにドリフト誤差を増大させるので、スキュー誤差がない四元数にしかドリフト誤差の改善方法は適用できない。

(4) 切り捨て誤差

計算機のビット長が有限であることから生ずる誤差で、演算中に最下位ビットの重みに満たない数値が切り捨てられると、それが累積して大きくなる。特に、積分や累積加算する式においては、理論値どおりの切り捨て誤差が累積してドリフトしてゆくの観測される。

図2.5-2に示したように、長いビット長のデータの下位を切り捨てると、そのデータが正の場合でも負の場合でも数直線上で値が小さくなるので、正の場合は切り捨てられてゼロに、負の場合は切り捨てられて-LSBになる。よって、積算データの最下位ビットの重み(LSB)の半分が、平均的に切り捨てられ、下記で表される。

$$\varepsilon_T = -\frac{\text{LSB}}{2} \dots\dots\dots (3.6.4-11)$$

従って、演算周期 ΔT 毎に時間 T の間、積算演算を繰り返すと、下記の累積切り捨て誤差が発生する。

$$\varepsilon_T = -\left(\frac{\text{LSB}}{2}\right)\frac{T}{\Delta T} \dots\dots\dots (3.6.4-12)$$

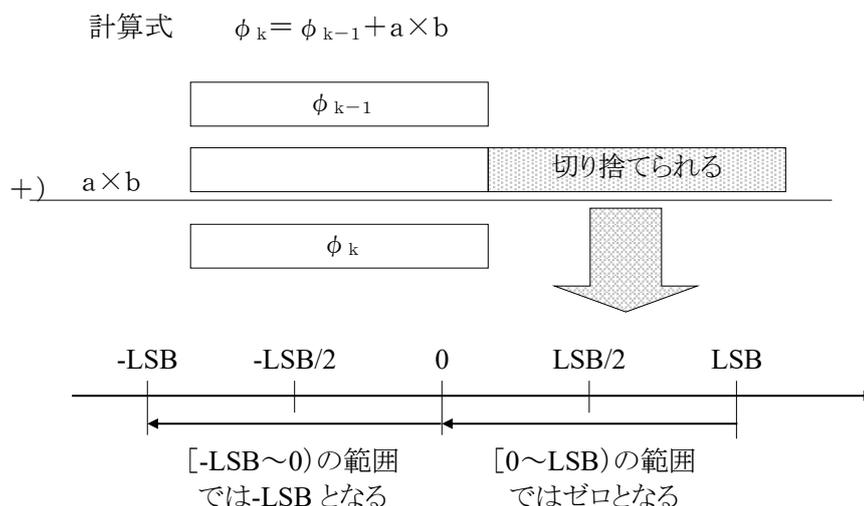


図3.6.4-2 切り捨て誤差

(5) 丸め誤差

上記(4)項の切り捨て誤差と同様に、計算機のビット長が有限であることから生ずる誤差であるが、演算中に最下位ビットの重みに満たない数値が四捨五入(丸め)される場合に発生する誤差で、下記のように表される。

$$\epsilon_R = \pm \frac{LSB}{2} \dots\dots\dots (3.6.4-13)$$

この誤差は平均値ゼロで分布区間 $[-\frac{LSB}{2}, \frac{LSB}{2}]$ の範囲で一様分布する考えられるので、量子化誤差と同様に、その分散は下記で表される。

$$\sigma_R^2 = \frac{LSB^2}{12} \dots\dots\dots (3.6.4-14)$$

従って、演算周期 ΔT 毎に時間Tの間、丸め誤差を持ったデータを積算すると、下記の累積丸め誤差が発生する。

$$\sigma_R = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \sqrt{n} = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{T}{\Delta T}} \dots\dots\dots (3.6.4-15)$$

(6) コーニングドリフト補正残差

コーニング補正(座標回転の補正)は3.5項に述べた方法で行い、ジャイロで計測できない式(3.5-1)の第2項以降のノンコミュタティビティ・レートのうち、無視された第3項が補正残差となる。

姿勢更新は、回転ベクトルの式(3.5-1)を微小時間 Δt 間で積分して得た角度増分を用いて行うので、その微小時間 Δt 間の角度増分は微小と見なせて $\Delta\theta_{(t)} \ll 1$ であるから、第3項の係数は3.5項にも示したように $\frac{1}{\Delta\theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta\theta_{(t)} \sin \Delta\theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta\theta_{(t)})}\right) \cong \frac{1}{12}$ となり、コーニングドリフト補正残差は下記で表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta_{c(T)}} &= \int_{T-\Delta t}^T \left[\frac{1}{\Delta\theta_{(t)}^2} \left(1 - \frac{\Delta\theta_{(t)} \sin \Delta\theta_{(t)}}{2(1 - \cos \Delta\theta_{(t)})}\right) \{ \Delta\theta_{(t)} \times (\Delta\theta_{(t)} \times \omega_{B(t)}) \} \right] dt \\ &= \frac{1}{12} \int_{T-\Delta t}^T \{ \Delta\theta_{(t)} \times (\Delta\theta_{(t)} \times \omega_{B(t)}) \} dt = \frac{1}{12} \int_{T-\Delta t}^T \{ [\Delta\theta_{(t)} \times]^2 \cdot \omega_{B(t)} \} dt \dots\dots\dots (3.6.4-16) \end{aligned}$$

よって、式(3.5-7)と同様に、上式の $\Delta\theta_{(t)}$ をジャイロ出力信号 $\Delta\theta_{B(t)} = \int \omega_{B(t)} dt$ を用いて近似し、シンプソンの積分公式を用いて積分すれば

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\theta_{c(T)} &= \frac{1}{12} \int_{T-\Delta t}^T \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^t \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(t)} \right\} dt \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \frac{\Delta t}{6} \left[\left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t} \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T-\Delta t)} \right\} + 4 \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^T \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T)} \right\} \right] \\
 &= \frac{\Delta t}{72} \left[4 \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t} \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ \left[\left(\int_{T-\Delta t}^T \omega_{B(\tau)} d\tau \right) \times \right]^2 \cdot \omega_{B(T)} \right\} \right] \\
 &= \frac{\Delta t}{72} \left[4 \left\{ [\Delta\theta_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \times]^2 \cdot \omega_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \right\} + \left\{ [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \omega_{B(T)} \right\} \right] \dots\dots\dots (3.6.4-17)
 \end{aligned}$$

従って、上式に式(3.5-10)、式(3.5-13)および式(3.5-14)を代入して、コーニングドリフト補正残差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\theta_{c(T)} &= \frac{\Delta t}{72} \left[4 \left\{ \left[\left(\frac{1}{8} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8} \Delta\theta_{B(T)} \right) \times \right]^2 \cdot \left(\frac{1}{\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \left(-\frac{1}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t} \Delta\theta_{B(T)} \right) \right\} \right] \\
 &= \frac{\Delta t}{72} \left\{ \frac{1}{2\Delta t} [\Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T)} - \frac{1}{2\Delta t} [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \right\} \\
 &= \frac{1}{144} \left\{ [\Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T)} - [\Delta\theta_{B(T)} \times]^2 \cdot \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} \right\} \dots\dots\dots (3.6.4-18)
 \end{aligned}$$

ここでコーニング運動を式(2.3-5)のように下記で表して積分すると

$$\begin{aligned}
 \omega_{B(t)} &= \Omega \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \cos \Omega t \\ -\sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.4-19) \\
 \Delta\theta_{B(T)} &= \int_{T-\Delta t}^T \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta) \\ \Omega \sin \theta \cos \Omega t \\ -\Omega \sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)t \\ \sin \theta \sin \Omega t \\ \sin \theta \cos \Omega t \end{pmatrix} \Bigg|_{T-\Delta t}^T = \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega (T) - \sin \Omega (T - \Delta t) \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega (T) - \cos \Omega (T - \Delta t) \} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega T - \sin \Omega T \cos \Omega \Delta t + \cos \Omega T \sin \Omega \Delta t \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega T - \cos \Omega T \cos \Omega \Delta t - \sin \Omega T \sin \Omega \Delta t \} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで $\theta \ll 1$ 及び $\Omega\Delta t \ll 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_{B(T)} &= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \Omega \Delta t \\ \theta \left\{ \sin \Omega T - \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \sin \Omega T + \Omega \Delta t \cos \Omega T \right\} \\ \theta \left\{ \cos \Omega T - \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \cos \Omega T - \Omega \Delta t \sin \Omega T \right\} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ \Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6.4-20)
 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_{B(T-\Delta t)} &= \int_{T-2\Delta t}^{T-\Delta t} \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta) \\ \Omega \sin \theta \cos \Omega t \\ -\Omega \sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)t \\ \sin \theta \sin \Omega t \\ \sin \theta \cos \Omega t \end{pmatrix} \Bigg|_{T-2\Delta t}^{T-\Delta t} \\
 &= \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega (T - \Delta t) - \sin \Omega (T - 2\Delta t) \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega (T - \Delta t) - \cos \Omega (T - 2\Delta t) \} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \Omega(1 - \cos \theta)\Delta t \\ \sin \theta \{ \sin \Omega T \cos \Omega \Delta t - \cos \Omega T \sin \Omega \Delta t - \sin \Omega T \cos 2 \Omega \Delta t + \cos \Omega T \sin 2 \Omega \Delta t \} \\ \sin \theta \{ \cos \Omega T \cos \Omega \Delta t + \sin \Omega T \sin \Omega \Delta t - \cos \Omega T \cos 2 \Omega \Delta t - \sin \Omega T \sin 2 \Omega \Delta t \} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \Omega \Delta t \\ \theta \left\{ \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \sin \Omega T - \Omega \Delta t \cos \Omega T - (1 - 2\Omega^2 \Delta t^2) \sin \Omega T + 2\Omega \Delta t \cos \Omega T \right\} \\ \theta \left\{ \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \cos \Omega T + \Omega \Delta t \sin \Omega T - (1 - 2\Omega^2 \Delta t^2) \cos \Omega T - 2\Omega \Delta t \sin \Omega T \right\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \Omega \Delta t \\ \theta \left\{ \frac{3}{2} \Omega^2 \Delta t^2 \sin \Omega T + \Omega \Delta t \cos \Omega T \right\} \\ \theta \left\{ \frac{3}{2} \Omega^2 \Delta t^2 \cos \Omega T - \Omega \Delta t \sin \Omega T \right\} \end{pmatrix} = \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \{ 3\Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \} \\ \{ 3\Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \} \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-21)
\end{aligned}$$

ここで式(3.6.4-20)及び式(3.6.4-21)を下記のように略記して

$$\begin{aligned}
\Delta \theta_{B(T)} &= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ \Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} \equiv \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\Delta \theta_{B(T-\Delta t)} &= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ 3\Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ 3\Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} = \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \Delta t \sin \Omega T + 2 \cos \Omega T \\ \Omega \Delta t \cos \Omega T - 2 \sin \Omega T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \Delta t \sin \Omega T \\ 2\Omega \Delta t \cos \Omega T \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \begin{pmatrix} x \\ y + b \\ z + c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3.6.4-18)式のシンメトリックマトリクスは上式より

$$[\Delta \theta_{B(T)} \times]^2 = \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-22)$$

$$[\Delta \theta_{B(T-\Delta t)} \times]^2 = \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} -(y+b)^2 - (z+c)^2 & x(y+b) & x(z+c) \\ x(y+b) & -x^2 - (z+c)^2 & (y+b)(z+c) \\ x(z+c) & (y+b)(z+c) & -x^2 - (y+b)^2 \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-23)$$

よって、コーニングドリフト補正残差は下記で表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c(T)} &= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \left\{ \begin{pmatrix} -(y+b)^2 - (z+c)^2 & x(y+b) & x(z+c) \\ x(y+b) & -x^2 - (z+c)^2 & (y+b)(z+c) \\ x(z+c) & (y+b)(z+c) & -x^2 - (y+b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y + b \\ z + c \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} -x(2yb + b^2 + 2zc + c^2) \\ 2x^2b + 2z^2b - yc^2 - 2yzc + zbc \\ 2x^2c + 2y^2c - zb^2 - 2yzb + ybc \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} -8\theta(\Omega \Delta t)^2 \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \sin \Omega T - 16(\Omega \Delta t)^2 s^2 c + 16(\Omega \Delta t) s^3 - 16(\Omega \Delta t)^2 c^3 + 16(\Omega \Delta t) s c^2 \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \cos \Omega T + 16(\Omega \Delta t)^2 s c^2 + 16(\Omega \Delta t) c^3 + 16(\Omega \Delta t)^2 s^3 + 16(\Omega \Delta t) s^2 c \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{144} \left(\frac{\theta \Omega \Delta t}{2} \right)^3 \begin{pmatrix} -8\theta(\Omega \Delta t)^2 \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \sin \Omega T - 16(\Omega \Delta t)^2 \cos \Omega T + 16(\Omega \Delta t) \sin \Omega T \\ 4\theta^2(\Omega \Delta t) \cos \Omega T + 16(\Omega \Delta t)^2 \sin \Omega T + 16(\Omega \Delta t) \cos \Omega T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

高次項を省略して

$$\varepsilon_{c(T)} = \frac{\theta^3(\Omega \Delta t)^4}{144} \begin{pmatrix} -\theta(\Omega \Delta t) \\ 2 \sin \Omega T \\ 2 \cos \Omega T \end{pmatrix} \cdots (3.6.4-24)$$

ここで、 θ :コーニング半頂角

Ω :コーニングレート

Δt :データサンプリング時間間隔

4 位置及び速度の計算方法

4.1 位置及び速度

ロケットに作用する加速度は下記で表される。

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_F + \mathbf{g} \dots\dots\dots (4.1-1)$$

ここで、 \mathbf{a}_F : 推力と空気力による加速度ベクトル

\mathbf{g} : 重力加速度ベクトル

ロケットの航法においては、加速度計で \mathbf{a}_F を検出し、加速度計で検出できない \mathbf{g} を位置ベクトルから計算し、それらを積分した速度及び、さらに速度を積分した位置を下記のように求める。

$$\mathbf{v}_{(T)} = \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{a}_F dt + \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{g} dt \dots\dots\dots (4.1-2)$$

$$\mathbf{r}_{(T)} = \mathbf{r}_{(T-\Delta T)} + \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{v}_{(t)} dt \dots\dots\dots (4.1-3)$$

ここで、 \mathbf{v} : 慣性速度ベクトル

\mathbf{r} : 地心半径ベクトル

T : 現在時刻

ΔT : 位置・速度更新時間間隔(ロケットの場合、0.5秒~2秒程度)

上式の積分は、実際には離散化されたデータ(速度増分)を積算する形式で行うので、下記のように台形積分(改良オイラー法)によるイタレーション形式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T,0)})} &= \mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T-\Delta T)})} \\ \Delta \mathbf{v}_{(T),i} &= \Delta \mathbf{v}_{F(T)} + \frac{\Delta T}{2} \{ \mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T-\Delta T)})} + \mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T,i-1)})} \} \\ \mathbf{r}_{(T),i} &= \mathbf{r}_{(T-\Delta T)} + \left\{ \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}_{(T),i} \right\} \Delta t \\ \mathbf{v}_{(T)} &= \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \Delta \mathbf{v}_{(T),i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1-4)$$

ここで、繰り返し回数は、 $i=1\sim 2$ で十分

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)} = \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{a}_F dt: \text{推力と空気力による速度増分ベクトル(6.2項)}$$

上式で速度は繰り返しループに入れる必要はないが、簡略化するため上式のように表現した。また、重力加速度は J_2 項まで考慮して下記のとおり求められる。

$$\mathbf{g}_{(r)} = -\frac{\mu}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi_r - 1) \right\} \\ \frac{y}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi_r - 1) \right\} \\ \frac{z}{r} \left\{ 1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi_r - 3) \right\} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4.1-5)$$

ここで、 $\mu = 3.986009 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$: 地球重力定数

$j_2 = 1.082628 \times 10^{-3}$: 地球重力ポテンシャル調和係数

$a_e = 6378.142 \text{ km}$: 地球赤道半径

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_r \cos \lambda_r \\ \cos \phi_r \sin \lambda_r \\ \sin \phi_r \end{pmatrix}$$

ϕ_r : 地心緯度

λ_r : 経度

4.2 推力と空気力による速度増分ベクトル

ストラップダウン型の慣性センサ・ユニット(IMU)においては、加速度計は入力軸が機体の回転と共に方向を変えるので、それが検出した加速度を積分した値は座標基準が定かでない。このため、この積分値を微分して機体座標系から見た加速度に戻して回転の補正をしながら積分するか、慣性座標系に変換して積分するかして、定まった座標系での速度を求める必要がある。通常は、計算所要時間の観点から、計算量が少なくて済む機体座標系で求める方式を採る。実際には離散化されたデータの処理なので微小時間での速度増分が得られたら、それに回転の補正を施して積算する方式で、以下のように求める。

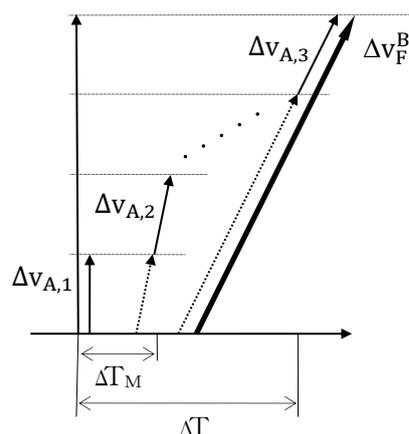


図4.2-1 回転座標系での速度増分の積算

まず、推力と空気力による加速度は、それを積分した速度が機体座標系で得られているものとする、その速度を微分して下記のように表すことができる。

$$\mathbf{v}_{F(t)} = \int_0^t \mathbf{a}_{F(\tau)} dt = \int_0^t (\mathbf{D}_{B(\tau)}^I \cdot \mathbf{a}_{F(\tau)}^B) d\tau = \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot \mathbf{v}_{F(t)}^B \dots\dots\dots (4.2-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{F(t)} &= \dot{\mathbf{D}}_{B(t)}^I \cdot \mathbf{v}_{F(t)}^B + \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B = \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times] \cdot \mathbf{v}_{F(t)}^B + \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B \\ &= \mathbf{D}_{B(t)}^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B + \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B) \dots\dots\dots (4.2-2) \end{aligned}$$

- ここで、 \mathbf{v}_F : 慣性座標系から見た推力と空気力による速度ベクトル
- $\dot{\mathbf{v}}_F$: 慣性座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトル
- \mathbf{D}_B^I : 慣性座標系から見た機体座標系の方向余弦マトリクス
- $\boldsymbol{\omega}_B$: 機体座標系の回転角速度ベクトル
- \mathbf{v}_F^B : 機体座標系から見た推力と空気力による速度ベクトル
- \mathbf{a}_F^B : 機体座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトル

従って、式(4.2-2)から機体座標系での速度の微係数は下記のように表され、これを積分して速度を求める式が得られる。

$$\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B = (\mathbf{D}_{B(t)}^I)^T \cdot \dot{\mathbf{v}}_{F(t)} - \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B = \mathbf{a}_{F(t)}^B - \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B \dots\dots\dots (4.2-3)$$

$$\mathbf{v}_{F(t)}^B = \int_0^t \mathbf{a}_{F(\tau)}^B d\tau - \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} \times \mathbf{v}_{F(\tau)}^B d\tau \dots\dots\dots (4.2-4)$$

上式の右辺第1項はIMUから得られる速度で、機体と共に回転して時々刻々変わる入力軸方向の加速度を積分したデータであり、第2項は回転補正項(コリオリの力)である。

ところで推力と空気力による速度ベクトルは、式(4.1-4)に示したように、慣性座標系から見た単位時間あたりの速度増分として用いるので、上式(4.2-4)の機体座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトルの積分は、式(4.1-4)における単位時間 ΔT での速度増分として求め、それを慣性座標系に座標変換して式(4.1-4)に繋ぐことになる。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^B = \int_{T-\Delta T}^T \mathbf{a}_{F(t)}^B dt - \int_{T-\Delta T}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \Delta \mathbf{v}_{F(t)}^B dt \dots\dots\dots (4.2-5)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)} = \mathbf{D}_{B(T)}^I \cdot \Delta \mathbf{v}_{F(T)}^B \dots\dots\dots (4.2-6)$$

次に式(4.2-5)の速度増分を求める。まず、IMUからは下記の出力が得られる。

$$\mathbf{v}_{A(T)} = \int_{t_0}^T \mathbf{a}_{F(t)}^B dt \dots\dots\dots (4.2-7)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{G(T)} = \int_{t_0}^T \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \dots\dots\dots (4.2-8)$$

ここで、 t_0 : 任意の時刻(不定)

このIMU出力を ΔT_M 時間間隔でサンプリングし、その差分を取って

$$\Delta \mathbf{v}_{A(T)} = \mathbf{v}_{A(T)} - \mathbf{v}_{A(T-\Delta T_M)} \dots\dots\dots (4.2-9)$$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)} = \boldsymbol{\theta}_{G(T)} - \boldsymbol{\theta}_{G(T-\Delta T_M)} \dots\dots\dots (4.2-10)$$

ここで、 $\Delta T_M = \frac{\Delta T}{m}$: 速度増分積算時間間隔 (通常、姿勢更新周期 (IMUデータサンプリング周期) と同じで、ロケットの場合、30Hzから50Hz程度)

上記の差分を用いて、 $t=T-\Delta T_M \sim T$ の期間における速度増分及び角速度は下記のように近似的に表される。

$$\mathbf{v}_{F(t)}^B = \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} (t - T + \Delta T_M) \dots\dots\dots (4.2-11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B(t)} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} : (\text{一定}) \dots\dots\dots (4.2-12)$$

従って、式(4.2-5)に式(4.2-11)及び式(4.2-12)を代入して ΔT_M 間だけ積分すると

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{F(T)}^B &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} - \int_{T-\Delta T_M}^T \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \left\{ \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} (t - T + \Delta T_M) \right\} dt \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} \\ &\quad - \left[\left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B \right\} t - \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} \right\} \left\{ \frac{t^2}{2} - (T - \Delta T_M)t \right\} \right]_{T-\Delta T_M}^T \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} - \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B \right\} \Delta T_M - \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \times \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M} \right\} \frac{\Delta T_M^2}{2} \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \Delta \mathbf{v}_{A(T)} - \Delta \boldsymbol{\theta}_{G(T)} \times \left\{ \Delta \mathbf{v}_{F(T-\Delta T_M)}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A(T)}}{2} \right\} \dots\dots\dots (4.2-13) \end{aligned}$$

よって、 ΔT 間の速度増分の式(4.2-5)は、下記の漸化式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{F,0}^B &= 0 \\ \Delta \mathbf{v}_{F,k}^B &= \Delta \mathbf{v}_{F,k-1}^B + \Delta \mathbf{v}_{A,k} - \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,k} \times \left\{ \Delta \mathbf{v}_{F,k-1}^B + \frac{\Delta \mathbf{v}_{A,k}}{2} \right\} \dots\dots\dots (4.2-14) \end{aligned}$$

ここで、 $k=1 \sim m$

$\Delta \mathbf{v}_{A,k} \equiv \Delta \mathbf{v}_{A(T-\Delta T+k\Delta T_M)}$ であり、 $\Delta \mathbf{v}_{A,m} \equiv \Delta \mathbf{v}_{A(T)}$ である。下添字のkは以下同様。

上記の $k=m$ 時点の速度増分を下記のように慣性系に座標変換して式(4.1-4)にインプットする。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)} = \mathbf{D}_{B(T)}^I \cdot \Delta \mathbf{v}_{F,m}^B \dots\dots\dots (4.2-15)$$

4.3 座標回転の補正 (スカーリング補正)

IMUの内部でドリフト補償等のデータ処理を行うため、上記4.2項の ΔT_M より短い時間間隔で加速度計からのパルス出力を積算することがあり、この場合にも座標系の回転補正を行う必要がある。上記4.2項の回転補正の方法は式(4.2-3)に示したように、常に現在時刻の機体座標系から見た速度積算値を表すようにしているが、ここでは積算開始時点の機体座標系から見た速度積算となるように、この積算開始時点の機体座標系を慣性系と見なして積算する方法を示す。この補正は微少時間での角度増分を用いた座標変換であるが、方向余弦マトリクスや四元数等を用いた座標変換とは区別してスカーリング補正と呼ばれている。

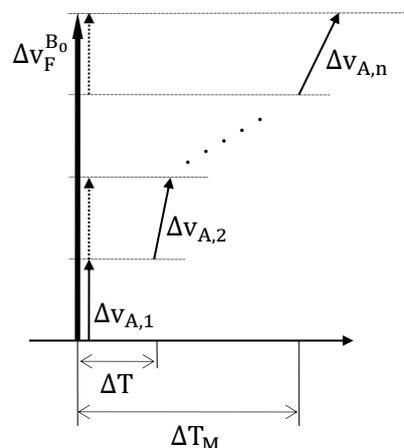


図4.3-1 座標回転の補正 (スカーリング補正)

まず、式(4.2-2)及び式(4.2-3)より、基準時刻 T_0 における機体座標系 B_0 での速度の微係数は下記のように表される。

$$\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^{B_0} = \mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^B + \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^B) = \mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} \cdot \mathbf{a}_{F(t)}^B \quad \dots\dots\dots (4.3-1)$$

上式の方角余弦マトリクスは、微小時間の間では下記のように近似して表すことができる。

$$\mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} = \mathbf{1} + \left[\int_{T_0}^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau \times \right] \quad \dots\dots\dots (4.3-2)$$

これを(4.3-1)式に代入して積分すれば、下記のように速度を求める式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{F(t)}^{B_0} &= \Delta \mathbf{v}_{F(t-\Delta T_s)}^{B_0} + \left(\mathbf{1} + \left[\int_{T_0}^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau \times \right] \right) \cdot \int_{t-\Delta T_s}^t \mathbf{a}_{F(\tau)}^B d\tau \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(t-\Delta T_s)}^{B_0} + \Delta \mathbf{v}_{A(t)} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{G(t)} \times \Delta \mathbf{v}_{A(t)} \quad \dots\dots\dots (4.3-3) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta \mathbf{v}_{A(t)} = \int_{t-\Delta T_s}^t \mathbf{a}_{F(\tau)}^B d\tau = \mathbf{v}_{A(t)} - \mathbf{v}_{A(t-\Delta T_s)}$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(t)} = \int_{T_0}^t \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau = \boldsymbol{\theta}_{G(t)} - \boldsymbol{\theta}_{G(T_0)} = \sum_{i=1}^j \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,i}$$

$$t = T_0 + j\Delta T_s$$

ΔT_s : IMU内での加速度データサンプリング周期

従って、上式の $\Delta T_M = n\Delta T_s$ 間のスカーリング補正を含む速度増分は、下記で表される。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^{B_0} = \sum_{j=1}^n \left\{ \Delta \mathbf{v}_{A,j} + \left(\sum_{i=1}^j \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,i} \right) \times \Delta \mathbf{v}_{A,j} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.3-4)$$

上式で求めた $\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^{B_0}$ が式(4.2-9)の $\Delta \mathbf{v}_{A(T)}$ に対応する速度増分で、実際にはIMU内部でこれを積算して式(4.2-9)の $\mathbf{v}_{A(T)}$ として出力される。

5 補足

5.1 オイラー角から固定角への変換

$\mathbf{D}_B^I = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$: オイラー角による方向余弦マトリクス

$(\mathbf{D}_B^I) = [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$: 固定角による回転マトリクス

このようにオイラー角と固定角では回転順が逆になる。

オイラー角から求めた方向余弦マトリクスと同じ値の回転マトリクスとなる固定角を求めるには、表3.3-2の回転順、例えば No.1 の $ijk=123$ のオイラー角では $[\theta_1]_1 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_3$ 。これとは回転軸が逆順の No.4 の $ijk=321$ のオイラー角では $[\theta_1]_3 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_1$ となっているところを、名称のみ θ_1 と θ_3 を入れ替えて $[\theta_3]_3 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_1]_1$ とすれば固定角になる。従って、オイラー角から方向余弦マトリクスを求め、この方向余弦マトリクスから固定角に変換するのが便利である。これを全オイラー角について整理した結果を表5.1-1に示す。

また、固定角からオイラー角に変換するには、固定角から回転マトリクスを求め、それを方向余弦マトリクスと見なして、固定角とは逆順のオイラー角を表3.3-2に示したように求めればよい。

表5.1-1 方向余弦マトリクスから固定角への変換

オイラー角		固定角 $(\mathbf{D}_B^I) = [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$			
No.	i, j, k	k, j, i	θ_3	θ_2	θ_1
1	1, 2, 3	3, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{33})$
2	2, 3, 1	1, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{22})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{11})$
3	3, 1, 2	2, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{22})$
4	3, 2, 1	1, 2, 3	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{11})$
5	1, 3, 2	2, 3, 1	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{22})$
6	2, 1, 3	3, 1, 2	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{22})$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{33})$
7	1, 2, 1	2, 1, 2	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{32})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{23})$
8	2, 3, 2	3, 2, 3	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{13})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{31})$
9	3, 1, 3	1, 3, 1	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{21})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{12})$
10	3, 2, 3	2, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{21})$
11	1, 3, 1	3, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{23})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{32})$
12	2, 1, 2	1, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{13})$

5.2 コーニングドリフトにおける逆マトリクス

2.3項に示した回転座標系のコーニング運動の角速度ベクトルは次のように表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\boldsymbol{\theta} \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \dots \dots \dots (5.2-1)$$

ここで θ はコーニング運動の半頂角で、上記にコーニング運動の回転ベクトル $\boldsymbol{\theta} = \theta \underline{\mathbf{e}}$ を代入して、

$$\boldsymbol{\omega}_B = \left\{ \mathbf{1} + \frac{\theta}{2}[\underline{\mathbf{e}} \times] + \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\underline{\mathbf{e}} \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \dots \dots \dots (5.2-2)$$

ここで $p = \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right)$ と置いて、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_B &= \left\{ \mathbf{1} + \frac{\theta}{2}[\underline{\mathbf{e}} \times] + p[\underline{\mathbf{e}} \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - p + p e_x^2 & -\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y & \frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \\ \frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y & 1 - p + p e_y^2 & -\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \\ -\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z & \frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z & 1 - p + p e_z^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

3行3列の逆マトリクスは次式で表される。

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32} & d_{32}d_{13} - d_{33}d_{12} & d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22} \\ d_{23}d_{31} - d_{21}d_{33} & d_{33}d_{11} - d_{31}d_{13} & d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23} \\ d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31} & d_{31}d_{12} - d_{32}d_{11} & d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{32} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33} - d_{13}d_{22}d_{31}$$

$\boldsymbol{\omega}_B$ の式に適用して、

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - p + p e_x^2)(1 - p + p e_y^2)(1 - p + p e_z^2) \\ &\quad + \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \\ &\quad + \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) - (1 - p + p e_x^2) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \left(\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \\ &\quad - \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) (1 - p + p e_z^2) - \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) (1 - p + p e_y^2) \left(-\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \end{aligned}$$

Δ の右辺各項は、

$$\begin{aligned} &(1 - p + p e_x^2)(1 - p + p e_y^2)(1 - p + p e_z^2) \\ &= (1 - p) \{ (1 - p)^2 + p(1 - p)(e_y^2 + e_z^2) + p^2 e_y^2 e_z^2 \} \\ &\quad + p e_x^2 \{ (1 - p)^2 + p(1 - p)(e_y^2 + e_z^2) + p^2 e_y^2 e_z^2 \} \\ &= (1 - p)^3 + p(1 - p)^2(e_y^2 + e_z^2) + p^2(1 - p)e_y^2 e_z^2 \\ &\quad + p(1 - p)^2 e_x^2 + p^2(1 - p)e_x^2(e_y^2 + e_z^2) + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\ &= (1 - p)^3 + p(1 - p)^2(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + p^2(1 - p)(e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2) + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\ &\quad \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \\ &= -\frac{\theta}{2} e_z \left(\frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z - \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 \right) \\ &\quad + p e_x e_y \left(\frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z - \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 \right) \\ &= -\frac{\theta^3}{8} e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4} e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4} e_y^2 e_z^2 - \frac{p^2 \theta}{2} e_x e_y e_z^3 \\ &\quad + \frac{p\theta^2}{4} e_x^2 e_y^2 - \frac{p^2 \theta}{2} e_x^3 e_y e_z - \frac{p^2 \theta}{2} e_x e_y^3 e_z + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \\
&= \frac{\theta}{2}e_y \left(\frac{\theta^2}{4}e_x e_z + \frac{p\theta}{2}e_y e_z^2 + \frac{p\theta}{2}e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z\right) \\
&\quad + pe_x e_z \left(\frac{\theta^2}{4}e_x e_z + \frac{p\theta}{2}e_y e_z^2 + \frac{p\theta}{2}e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z\right) \\
&= \frac{\theta^3}{8}e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_y^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y^3 e_z \\
&\quad + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_z^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y e_z^3 + \frac{p^2\theta}{2}e_x^3 e_y e_z + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - (1-p+pe_x^2) \left(-\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \\
&= (1-p) \left(\frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2 e_y^2 e_z^2\right) + pe_x^2 \left(\frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2 e_y^2 e_z^2\right) \\
&= (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2(1-p)e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - \left(-\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) (1-p+pe_z^2) \\
&= (1-p) \left(\frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2 e_x^2 e_y^2\right) + pe_z^2 \left(\frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2 e_x^2 e_y^2\right) \\
&= (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_y^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_z^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - \left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) (1-p+pe_y^2) \left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \\
&= (1-p) \left(\frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2 e_x^2 e_z^2\right) + pe_y^2 \left(\frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2 e_x^2 e_z^2\right) \\
&= (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_y^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1-p)^3 + p(1-p)^2(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + p^2(1-p)(e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2) + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad - \frac{\theta^3}{8}e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_y^2 e_z^2 - \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y e_z^3 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_y^2 - \frac{p^2\theta}{2}e_x^3 e_y e_z - \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y^3 e_z \\
&\quad + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + \frac{\theta^3}{8}e_x e_y e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_y^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y^3 e_z + \frac{p\theta^2}{4}e_x^2 e_z^2 + \frac{p^2\theta}{2}e_x e_y e_z^3 + \frac{p^2\theta}{2}e_x^3 e_y e_z \\
&\quad + p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_x^2 - p^2(1-p)e_y^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_x^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_z^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_y^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_z^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&\quad + (1-p) \frac{\theta^2}{4}e_y^2 - p^2(1-p)e_x^2 e_z^2 + \frac{p\theta^2}{4}e_y^4 - p^3 e_x^2 e_y^2 e_z^2 \\
&= (1-p)^3 + p(1-p)^2(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + (1-p)^2 + (1-p) \frac{\theta^2}{4}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) \\
&\quad + \frac{p\theta^2}{4} \{(e_x^4 + e_y^4 + e_z^4) + 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2)\}
\end{aligned}$$

ここで下記を代入して、

$$\begin{aligned}
e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 &= 1 \\
(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)^2 &= e_x^4 + e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_x^2 e_y^2 + e_y^4 + e_z^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2 + e_z^4 \\
&= e_x^4 + e_y^4 + e_z^4 + 2e_x^2 e_y^2 + 2e_y^2 e_z^2 + 2e_x^2 e_z^2 \\
e_x^4 + e_y^4 + e_z^4 &= (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)^2 - 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2) \\
&= 1 - 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2)
\end{aligned}$$

$$e_x^4 + e_y^4 + e_z^4 + 2(e_x^2 e_y^2 + e_y^2 e_z^2 + e_x^2 e_z^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-p)^2 + (1-p)\frac{\theta^2}{4} + \frac{p\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} + 1 - 2p + p^2 = \frac{\theta^2}{4} + 1 - 2\left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right) + \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right)^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} + 1 - 2 + \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} + 1 - \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\theta^2}{4} \left(\frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2 = \frac{\theta^2}{4} \left\{1 + \left(\frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

次に、逆マトリクスの各要素は、

$$\begin{aligned} d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32} &= (1-p + pe_y^2)(1-p + pe_z^2) - \left(-\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)\left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p)(e_y^2 + e_z^2) + p^2 e_y^2 e_z^2 + \frac{\theta^2}{4} e_x^2 - p^2 e_y^2 e_z^2 \\ &= (1-p)^2 + p(1-p)(1 - e_x^2) + \frac{\theta^2}{4} e_x^2 \\ &= (1-p)^2 + p(1-p) - p(1-p)e_x^2 + \frac{\theta^2}{4} e_x^2 \\ &= (1-p) + \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{23}d_{31} - d_{21}d_{33} &= \left(-\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)\left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) - \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right)(1-p + pe_z^2) \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z - \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 - (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - \frac{p\theta}{2} e_z^3 - p(1-p)e_x e_y - p^2 e_x e_y e_z^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y - \frac{p\theta}{2} e_z(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) - (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - p(1-p)e_x e_y \\ &= \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x e_y - \frac{\theta}{2} e_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31} &= \left(\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right)\left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right) - (1-p + pe_y^2)\left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z + \frac{p\theta}{2} e_y e_z^2 + \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z + (1-p)\frac{\theta}{2} e_y - p(1-p)e_x e_z + \frac{p\theta}{2} e_y^3 - p^2 e_x e_y^2 e_z \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z + \frac{p\theta}{2} e_y(e_x^2 + e_y^3 + e_z^2) + (1-p)\frac{\theta}{2} e_y - p(1-p)e_x e_z \\ &= \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x e_z + \frac{\theta}{2} e_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{32}d_{13} - d_{33}d_{12} &= \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)\left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) - (1-p + pe_z^2)\left(-\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y + \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_z + \frac{p\theta}{2} e_y^2 e_z + p^2 e_x e_y e_z^2 + (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - p(1-p)e_x e_y + \frac{p\theta}{2} e_z^3 - p^2 e_x e_y e_z^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} e_x e_y + \frac{p\theta}{2} e_z(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + (1-p)\frac{\theta}{2} e_z - p(1-p)e_x e_y \\ &= \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_x e_y + \frac{\theta}{2} e_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{33}d_{11} - d_{31}d_{13} &= (1-p + pe_z^2)(1-p + pe_x^2) - \left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right)\left(\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p)(e_x^2 + e_z^2) + p^2 e_x^2 e_z^2 + \frac{\theta^2}{4} e_y^2 - p^2 e_x^2 e_z^2 \\ &= (1-p)^2 + \frac{\theta^2}{4} e_y^2 + p(1-p)(1 - e_y^2) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p) + \frac{\theta^2}{4} e_y^2 - p(1-p)e_y^2 \\ &= (1-p) + \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)\right\} e_y^2 \end{aligned}$$

$$d_{31}d_{12} - d_{32}d_{11} = \left(-\frac{\theta}{2}e_y + pe_x e_z\right)\left(-\frac{\theta}{2}e_z + pe_x e_y\right) - \left(\frac{\theta}{2}e_x + pe_y e_z\right)(1-p + pe_x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z - \frac{p\theta}{2} e_x e_y^2 - \frac{p\theta}{2} e_x e_z^2 + p^2 e_x^2 e_y e_z - (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - \frac{p\theta}{2} e_x^3 - p(1-p) e_y e_z - p^2 e_x^2 e_y e_z \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z - \frac{p\theta}{2} e_x (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) - (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - p(1-p) e_y e_z \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_y e_z - \frac{\theta}{2} e_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22} &= \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) - \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) (1-p + p e_y^2) \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z - \frac{p\theta}{2} e_y e_z^2 - \frac{p\theta}{2} e_x^2 e_y + p^2 e_x e_y^2 e_z - (1-p) \frac{\theta}{2} e_y - \frac{p\theta}{2} e_y^3 - p(1-p) e_x e_z - p^2 e_x e_y^2 e_z \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_x e_z - \frac{p\theta}{2} e_y (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) - (1-p) \frac{\theta}{2} e_y - p(1-p) e_x e_z \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_x e_z - \frac{\theta}{2} e_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{13}d_{21} - d_{11}d_{23} &= \left(\frac{\theta}{2} e_y + p e_x e_z \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) - (1-p + p e_x^2) \left(-\frac{\theta}{2} e_x + p e_y e_z \right) \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z + \frac{p\theta}{2} e_x e_y^2 + \frac{p\theta}{2} e_x e_z^2 + p^2 e_x^2 e_y e_z + (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - p(1-p) e_y e_z + \frac{p\theta}{2} e_x^3 - p^2 e_x^2 e_y e_z \\
&= \frac{\theta^2}{4} e_y e_z + \frac{p\theta}{2} e_x (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + (1-p) \frac{\theta}{2} e_x - p(1-p) e_y e_z \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_y e_z + \frac{\theta}{2} e_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} &= (1-p + p e_x^2)(1-p + p e_y^2) - \left(-\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \left(\frac{\theta}{2} e_z + p e_x e_y \right) \\
&= (1-p)^2 + p(1-p)(e_x^2 + e_y^2) + p^2 e_x^2 e_y^2 + \frac{\theta^2}{4} e_z^2 - p^2 e_x^2 e_y^2 \\
&= (1-p)^2 + p(1-p)(1 - e_z^2) + \frac{\theta^2}{4} e_z^2 \\
&= (1-p) + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} e_z^2
\end{aligned}$$

マトリクスにまとめて、

$$\Delta \mathbf{D}^{-1} = (1-p) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & e_z & -e_y \\ -e_z & 0 & e_x \\ e_y & -e_x & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} \begin{pmatrix} e_x^2 & e_x e_y & e_x e_z \\ e_x e_y & e_y^2 & e_y e_z \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 \end{pmatrix}$$

ここで下記を代入して、

$$\begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} = [\underline{e} \times] \quad \text{: 式(2.1-4)}$$

$$\begin{pmatrix} e_x^2 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & e_y^2 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 \end{pmatrix} = [\underline{e} \times]^2 + \mathbf{1} \quad \text{: 式(2.1-5)より}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{D}^{-1} &= (1-p) \mathbf{1} - \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} ([\underline{e} \times]^2 + \mathbf{1}) \\
&= \left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\} \mathbf{1} - \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} [\underline{e} \times]^2
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\}} \left[\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\} \mathbf{1} - \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\theta^2}{4} - p(1-p) \right\} [\underline{e} \times]^2 \right]$$

$$= \mathbf{1} - \frac{\frac{\theta}{2}}{\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\}} [\underline{e} \times] + \left\{ \frac{\frac{\theta^2}{4} - p(1-p)}{\left\{ \frac{\theta^2}{4} + (1-p)^2 \right\}} \right\} [\underline{e} \times]^2$$

係数部に下記を代入して、

$$\begin{aligned}
 p &= \left(1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right) \\
 \frac{\frac{\theta}{2}}{\left\{\frac{\theta^2}{4} + (1 - p)^2\right\}} &= \frac{1}{\frac{\theta}{2} \left\{1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2\right\}} = \frac{2}{\theta \left\{1 + \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}\right\}} = \frac{2(1 - \cos \theta)^2}{\theta \{2 - 2 \cos \theta\}} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \\
 \left\{\frac{\theta^2}{4} - p(1 - p)\right\} &= \frac{\frac{\theta^2}{4} + (1 - p)^2 - (1 - p)^2 - p(1 - p)}{\frac{\theta^2}{4} + (1 - p)^2} = 1 - \frac{(1 - p)}{\frac{\theta^2}{4} + (1 - p)^2} \\
 &= 1 - \frac{\left(\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right)}{\frac{\theta^2}{4} + \left(\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}\right)^2} = 1 - \frac{\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}}{\frac{\theta}{2} \left\{1 + \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}\right\}} = 1 - \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\frac{\theta}{2} \{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta\}} \\
 &= 1 - \frac{\sin \theta}{\theta}
 \end{aligned}$$

さらに下記の置き換えを行って、

$$\begin{aligned}
 \underline{e} &= \frac{\underline{\theta}}{\theta} \\
 \mathbf{D}^{-1} &= \mathbf{1} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\underline{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\underline{\theta} \times]^2 \\
 \underline{\omega}_B &= \left\{ \mathbf{1} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\underline{\theta} \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\underline{\theta} \times]^2 \right\} \cdot \dot{\underline{\theta}} \dots \dots \dots (5.2-3)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\underline{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B$

5.3 4ジンバルオイラー角

4ジンバルオイラー角を用いた安定プラットフォーム装置を図5.3-1に示す。ジャイロと加速度計を搭載したプラットフォームを4ジンバル機構で支持して機体の回転運動から分離し、常時水平を保ちながら北方向を追従させるか、慣性空間に静止させる仕組みとなっている。慣性空間に静止させる方式は特に慣性プラットフォームと呼ばれ、H-I ロケットで採用された。

4ジンバル機構の回転軸は自由に滑り、理想的には機体の回転運動がプラットフォームに伝わらないモデルで表される。実際には回転軸の摩擦等による微小な外乱トルクが作用してプラットフォームが傾くが、それをジャイロで検出してモータを駆動し安定化させる。このため、この方式では入力角速度のレンジが小さいジャイロを用いることができる。3ジンバル方式のジンバル機構では機体の運動状態によっては、3つの回転軸が同一平面に並んで制御不能状態(ジンバルロック)になることがあるが、4ジンバル方式とすることでそれを避けることができる。

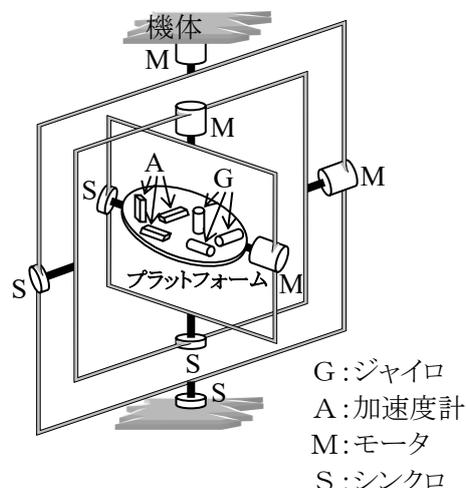


図5.3-1 4ジンバル安定プラットフォーム

図に示した4ジンバル機構は機体に結合される外側からアウターロールジンバル、ヨージンバル、インナーロールジンバル、ピッチ(プラットフォーム)ジンバルで構成される。ジャイロ信号はヨー、インナーロール、ピッチの3ジンバルを制御してプラットフォームを安定化させ、アウターロールジンバルはインナーロールジンバルのシンクロ(角度読取器)信号が常にゼロになるように制御される。このことにより、アウターロール、ヨー、ピッチの3ジンバル機構のように通常は作動している。このため、中間のヨージンバルがアウターロールジンバルに対して相対的に88度→89度と90度に接近するとジンバルロック状態に近づいてしまう。このようになるとジャイロ信号の制御でインナーロールジンバルが急速に傾く。その結果アウターロールジンバルが急速に180度反転して、90度に接近していたヨージンバルが89度→88度と角度が小さくなる方向に動くこととなってジンバルロックが回避される。アウターロールジンバルが180度反転する状態はジンバルフリップと呼んでいる。

5.4 センサ誤差

衛星打上用大型ロケットにおける慣性センサ(IMU)の主要特性例を表5.4-1に示す。

表5.4-1 慣性センサ(IMU)の主要特性例

項目	H-I ロケット	H-II ロケット	H-IIA ロケット
方式	4 ジンバル 安定プラットフォーム方式	ストラップダウン方式	ストラップダウン方式
ジャイロ	浮動型レート積分ジャイロ 計測レンジ 0.6 [°/s] ロングターム安定性(3σ) バイアス 0.035 [°/h] マスアンバランス 0.1 [°/h/m/s ²]	リング・レーザ・ジャイロ 計測レンジ 120 [°/s] ロングターム安定性(3σ) バイアス 0.096 [°/h] スケールファクタ 33×10 ⁻⁶	リング・レーザ・ジャイロ 計測レンジ 200 [°/s] ロングターム安定性(3σ) バイアス 0.031 [°/h] スケールファクタ 15×10 ⁻⁶
加速度計	振子式加速度計(オイルダンブ) 計測レンジ 98 [m/s ²] ロングターム安定性(3σ) バイアス 1275 [μm/s ²] スケールファクタ 150×10 ⁻⁶	振子式加速度計(ガスダンブ) 計測レンジ 198 [m/s ²] ロングターム安定性(3σ) バイアス 1275 [μm/s ²] スケールファクタ 150×10 ⁻⁶	振子式加速度計(ガスダンブ) 計測レンジ 198 [m/s ²] ロングターム安定性(3σ) バイアス 1128 [μm/s ²] スケールファクタ 144×10 ⁻⁶