

## 第2章 慣性航法のアルゴリズム

## 目 次

1 座標系.....	4
1.1 座標系の表現.....	4
1.2 座標系の回転.....	7
1.3 座標変換.....	10
1.4 回転マトリクスの合成.....	11
2 姿勢の回転の表現.....	12
2.1 ロドリゲスの回転公式.....	12
2.2 回転ベクトル.....	13
2.3 コーニング運動.....	16
3 姿勢の計算法.....	18
3.1 姿勢の表現方法.....	18
3.2 方向余弦マトリクス.....	19
3.3 オイラー角.....	21
3.4 四元数(クォータニオン).....	26
3.5 座標回転の補正(コーニング補正).....	33
3.6 姿勢計算誤差及びその改良法.....	37
3.6.1 姿勢計算誤差の表現.....	37
3.6.2 打ち切り誤差.....	39
3.6.3 姿勢計算誤差の改良法.....	42
3.6.4 姿勢誤差の評価.....	45
4 位置及び速度の計算方法.....	52
4.1 位置及び速度.....	52
4.2 推力と空気力による速度増分ベクトル.....	53
4.3 座標回転の補正(スカーリング補正).....	54
5 補足.....	56
5.1 オイラー角から固定角への変換.....	56
5.2 コーニングドリフトにおける逆マトリクス.....	57
5.3 4ジンバルオイラー角.....	62
5.4 センサ誤差.....	63

## 図 リ ス ト

図1.1-1 3軸直交座標系 .....	4
図1.1-2 ベクトルの表現 .....	4
図1.2-1 ベクトルの回転 .....	7
図1.2-2 固定角による座標系の回転 .....	8
図1.2-3 座標系の回転 .....	9
図1.3-1 ベクトルの座標変換 .....	10
図2.1-1 姿勢の回転 .....	12
図2.3-1 コーニング運動 .....	17
図3.3-1 オイラー角 .....	21
図3.4-1 回転座標系におけるオイラー軸 .....	31
図3.6.1-1 姿勢計算誤差 .....	37
図3.6.4-1 量子化誤差 .....	45
図3.6.4-2 切り捨て誤差 .....	48
図4.2-1 回転座標系での速度増分の積算 .....	53
図4.3-1 座標回転の補正(スカーリング補正) .....	54
図5.3-1 4ジンバル安定プラットフォーム .....	62

## 表 リ ス ト

表 3.1-1 姿勢の表現方法 .....	18
表 3.3-1 オイラー角から方向余弦マトリクスへの変換 .....	22
表 3.3-2 方向余弦から回転順のオイラー角への変換 .....	23
表 3.3-3 方向余弦から座標軸順のオイラー角への変換 .....	23
表 3.3-4 オイラー角微係数への変換マトリクス .....	25
表 3.6.3-1 姿勢更新における近似係数 .....	42
表 3.6.3-2 姿勢更新における近似係数の改良 .....	44
表 3.6.4-1 姿勢更新における打ち切り誤差 .....	47
表 5.1-1 方向余弦マトリクスから固定角への変換 .....	56
表 5.4-1 慣性センサ (IMU) の主要特性例 .....	63

## 1 座標系

本書で用いる座標系や関連諸量について、基本的な表記を説明する。

### 1.1 座標系の表現

宇宙飛行体の位置、速度及び姿勢を3次元空間で表現するには、基準となる座標系が必要となる。本書で用いている座標系の定義を以下に示す。

#### (1) 慣性座標系

3軸直交座標系(o-x, y, z)の座標軸方向単位ベクトル( $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ )が次の標準基底で表される正規直交基底を成す座標系は本書で用いるすべての座標系のベースとなる。これを本書では「慣性座標系」と呼ぶこととする。

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-1)$$

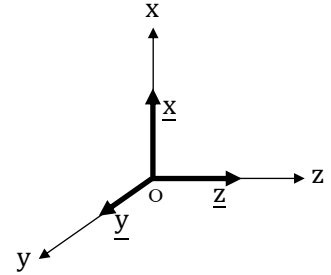


図1.1-1 3軸直交座標系

#### (2) 方向余弦及びベクトルの表現

3次元空間における任意のベクトル $\mathbf{a}$ は基底の一次結合で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\mathbf{a} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\mathbf{a} \cdot \underline{z})\underline{z} \\ &= a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} \dots\dots\dots (1.1-2) \end{aligned}$$

また、成分を列挙する形式で下記のように表される。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \underline{x} \\ \mathbf{a} \cdot \underline{y} \\ \mathbf{a} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-3)$$

図1.1-2 に示したベクトル $\mathbf{a}$ は、座標系の各軸ベクトルとの間の角度で表すことができる。この角度は方向角と呼ばれ、その余弦をとった方向余弦によって各軸方向の成分の大きさを表す。

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \begin{pmatrix} \cos(\gamma_x) \\ \cos(\gamma_y) \\ \cos(\gamma_z) \end{pmatrix} = |\mathbf{a}| \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-4)$$

$\gamma_x$ 、 $\gamma_y$ 、 $\gamma_z$  : 方向角

$d_x$ 、 $d_y$ 、 $d_z$  : 方向余弦

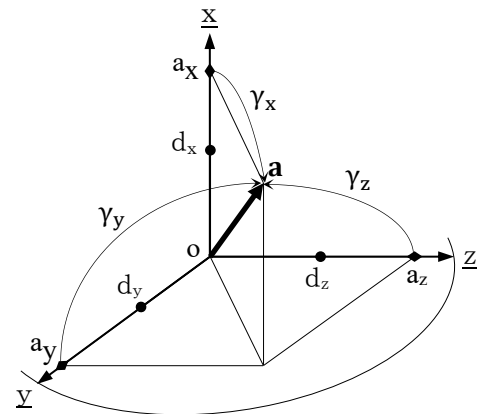


図1.1-2 ベクトルの表現

なお、単位ベクトルは下線付きで表し、一般のベクトルと区別するものとする。

$$\underline{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.1-5)$$

#### (3) 一般の座標系でのベクトルの表現

一般の座標系を3軸直交座標系G(o- $\xi, \eta, \zeta$ )としたとき、3つの座標軸単位ベクトルは、前記(2)項に示した方向余弦を用いて下記のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \underline{\xi} &= (\underline{\xi} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{\xi} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\underline{\xi} \cdot \underline{z})\underline{z} = \xi_x \underline{x} + \xi_y \underline{y} + \xi_z \underline{z} \\ \underline{\eta} &= (\underline{\eta} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{\eta} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\underline{\eta} \cdot \underline{z})\underline{z} = \eta_x \underline{x} + \eta_y \underline{y} + \eta_z \underline{z} \\ \underline{\zeta} &= (\underline{\zeta} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{\zeta} \cdot \underline{y})\underline{y} + (\underline{\zeta} \cdot \underline{z})\underline{z} = \zeta_x \underline{x} + \zeta_y \underline{y} + \zeta_z \underline{z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1-6)$$

正規直交基底と方向余弦の一次式で表されるこの座標軸ベクトルも正規直交基底を成し、前記(2)項に示したベクトル $\mathbf{a}$ は式(1.1-2)と同様に、下記のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\mathbf{a} \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi} + (\mathbf{a} \cdot \underline{\eta}) \underline{\eta} + (\mathbf{a} \cdot \underline{\zeta}) \underline{\zeta} \\ &= a_{\xi} \underline{\xi} + a_{\eta} \underline{\eta} + a_{\zeta} \underline{\zeta} \cdots \cdots \cdots (1.1-7)\end{aligned}$$

また、ベクトル $\mathbf{a}$ は上記の成分(方向余弦)を列挙する形式で式(1.1-3)と同様に表すことができるが、どの座標系で表したベクトルかを明示するため、基準とする座標系の記号を右上添字として付加して識別するものとする。ただし、慣性座標系で表したベクトルの場合は省略できる。上記の座標系 $(o-\xi, \eta, \zeta)$ の識別記号を $G$ とすれば、「座標系 $G$ で表したベクトル $\mathbf{a}$ 」は下記のように表す。これは「座標系 $G$ から見たベクトル $\mathbf{a}$ 」ということもある。ベクトル $\mathbf{a}^G$ の基準座標系は座標系 $G$ である。なお、座標系 $G$ の座標軸ベクトルは慣性座標系で表されるので、座標軸ベクトルで表現したベクトルは慣性座標系のベクトルである。

$$\mathbf{a}^G = \begin{pmatrix} a_{\xi} \\ a_{\eta} \\ a_{\zeta} \end{pmatrix} : \text{座標系 } G \text{ で表したベクトル } \mathbf{a} \cdots \cdots \cdots (1.1-8)$$

$$\mathbf{a} = a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} = a_{\xi} \underline{\xi} + a_{\eta} \underline{\eta} + a_{\zeta} \underline{\zeta} : \text{慣性座標系で表したベクトル}$$

#### (4) 方向余弦マトリクス

一般の座標系は基準とする座標系に回転操作を加えて定義される。

慣性座標系 $I$ に回転操作を加えて3軸直交座標系 $G(o-\xi, \eta, \zeta)$ を定義したとき、

$$\begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_G^I : \text{座標系の回転} \cdots \cdots \cdots (1.1-9)$$

$$\mathbf{D}_G^I : \text{座標系 } I \text{ から座標系 } G \text{ への回転マトリクス} \cdots \cdots \cdots (1.1-10)$$

式(1.1-9)に両辺に左から $\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T$ を乗じて、

$$\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_G^I$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \cdot \underline{x} & \underline{\eta} \cdot \underline{x} & \underline{\zeta} \cdot \underline{x} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{y} & \underline{\eta} \cdot \underline{y} & \underline{\zeta} \cdot \underline{y} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{z} & \underline{\eta} \cdot \underline{z} & \underline{\zeta} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_G^I$$

$$\mathbf{D}_G^I = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \cdot \underline{x} & \underline{\eta} \cdot \underline{x} & \underline{\zeta} \cdot \underline{x} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{y} & \underline{\eta} \cdot \underline{y} & \underline{\zeta} \cdot \underline{y} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{z} & \underline{\eta} \cdot \underline{z} & \underline{\zeta} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^I & \eta^I & \zeta^I \end{pmatrix}$$

慣性座標系 $I$ で表されたベクトル $\underline{\xi}^I, \eta^I, \zeta^I$ は元の $\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta}$ と同じなので座標系の識別記号を省略して、

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_G^I &= \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\xi} \cdot \underline{x} & \underline{\eta} \cdot \underline{x} & \underline{\zeta} \cdot \underline{x} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{y} & \underline{\eta} \cdot \underline{y} & \underline{\zeta} \cdot \underline{y} \\ \underline{\xi} \cdot \underline{z} & \underline{\eta} \cdot \underline{z} & \underline{\zeta} \cdot \underline{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} : \text{方向余弦マトリクス} \cdots \cdots \cdots (1.1-11)\end{aligned}$$

座標系の回転に用いる回転マトリクスの各要素は方向余弦で、これは方向余弦マトリクスと呼ばれる。

一般に、ある座標系 $A(o-x_A, y_A, z_A)$ は、基準とする座標系 $R(o-x_R, y_R, z_R)$ から見た方向余弦マトリクスで表され、それぞれの座標系を識別する記号を添字として用いて、下記のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_A &= d_{11} \underline{x}_R + d_{21} \underline{y}_R + d_{31} \underline{z}_R \\ \underline{y}_A &= d_{12} \underline{x}_R + d_{22} \underline{y}_R + d_{32} \underline{z}_R \\ \underline{z}_A &= d_{13} \underline{x}_R + d_{23} \underline{y}_R + d_{33} \underline{z}_R \end{aligned} \right\} \text{ のとき}$$

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R) \cdots \cdots \cdots (1.1-12)$$

上記の方向余弦マトリクスは、添字を上から下にD、R、Aと読むものとする。

この座標系Rから見た座標系Aの方向余弦マトリクスは、座標系Rから見た座標系Aの3つの座標軸ベクトルで構成されている、ということもできる。

また、この方向余弦マトリクスの転置マトリクスは、下記のように表される。

$$\mathbf{D}_A^{RT} = \mathbf{D}_R^A = \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} = (\underline{x}_R^A \quad \underline{y}_R^A \quad \underline{z}_R^A) = (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R)^T \cdots \cdots \cdots (1.1-13)$$

方向余弦マトリクスとその転置マトリクスの積は、下記に示したように単位マトリクスになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^{RT} \cdot \mathbf{D}_A^R &= \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \\ &= (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R)^T \cdot (\underline{x}_A^R \quad \underline{y}_A^R \quad \underline{z}_A^R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.1-14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_A^{RT} &= \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R \\ \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{x}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{y}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{y}_A \cdot \underline{z}_R \\ \underline{z}_A \cdot \underline{x}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{y}_R & \underline{z}_A \cdot \underline{z}_R \end{pmatrix} \\ &= (\underline{x}_R^A \quad \underline{y}_R^A \quad \underline{z}_R^A)^T \cdot (\underline{x}_R^A \quad \underline{y}_R^A \quad \underline{z}_R^A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.1-15) \end{aligned}$$

また、方向余弦マトリクスとその逆マトリクスの積は単位マトリクスになるはずだから、

$$\mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_A^{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.1-16)$$

このように、方向余弦マトリクスの逆マトリクスは転置マトリクスに等しく、方向余弦マトリクスが直交行列であることが分かる。

$$\mathbf{D}_A^{R^{-1}} = \mathbf{D}_A^{RT} \cdots \cdots \cdots (1.1-17)$$

方向余弦マトリクスの3個の列ベクトルおよび3個の行ベクトルは正規直交基底を成す。

$\underline{x}_A^R$ 、 $\underline{y}_A^R$ 、 $\underline{z}_A^R$  : 方向余弦マトリクス $\mathbf{D}_A^R$ の3個の列ベクトルは正規直交基底を成す

$\underline{x}_R^A$ 、 $\underline{y}_R^A$ 、 $\underline{z}_R^A$  : 方向余弦マトリクス $\mathbf{D}_A^R$ の3個の行ベクトルは正規直交基底を成す

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_{Ax}^R & y_{Ax}^R & z_{Ax}^R \\ x_{Ay}^R & y_{Ay}^R & z_{Ay}^R \\ x_{Az}^R & y_{Az}^R & z_{Az}^R \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \underline{x}_A^R \\ \underline{y}_A^R \\ \underline{z}_A^R \end{matrix}$$

## 1.2 座標系の回転

### (1) ベクトルの回転

図1.2-1に示した任意のベクトル $\mathbf{a}$ は下記のように表される。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos \beta \\ a \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.2-1)$$

上記のベクトルをx軸回りに角度 $\theta$ だけ回転したベクトル $\mathbf{a}'$ は下記のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos(\beta + \theta) \\ a \sin \alpha \sin(\beta + \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha (\cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta) \\ a \sin \alpha (\sin \beta \cos \theta + \cos \beta \sin \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cos \theta - a_z \sin \theta \\ a_z \cos \theta + a_y \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots (1.2-2) \end{aligned}$$

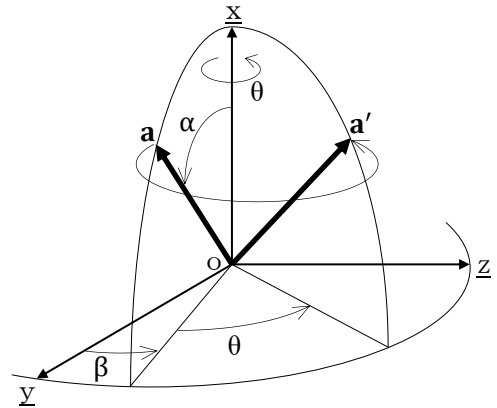


図1.2-1 ベクトルの回転

### (2) 回転マトリクス

前記(1)項に示したベクトルの回転はy軸及びz軸についても考えられ、それらは下記のように表される。

$$\mathbf{a}' = [\theta]_i \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots (1.2-3)$$

ここで、 $i=1$ のとき、第1軸(x軸)回りの回転

$i=2$ のとき、第2軸(y軸)回りの回転

$i=3$ のとき、第3軸(z軸)回りの回転を表す下記のマトリクスである。

$$[\theta]_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.2-4)$$

$$[\theta]_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.2-5)$$

$$[\theta]_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.2-6)$$

上記の回転を多段階に、任意の軸回りに任意の順序で行って得られるベクトルは下記のように表され、この回転によってベクトルを任意の方向に向けることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(n)'} &= [\theta_n]_p \cdot \mathbf{a}^{(n-1)'} = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot \mathbf{a}'' = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot \mathbf{a}' \\ &= [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{a} : \text{固定角によるベクトルの回転} \dots\dots\dots (1.2-7) \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n$  : 回転角を表し、それぞれ1回目、2回目 $\cdots$ n回目の回転角

$i, j, k \cdots p$  : 回転軸を表し、それぞれ1 or 2 or 3の何れかを示す

回転軸を表す番号は、座標系の第1軸、第2軸、第3軸を表す。x、y、z としないのは、座標系の軸名称がxyzとは限らないからである。なお、 $\theta_i$ は同一の座標系における座標軸周りの回転角で固定角と呼ばれ、回転する度に順次できる新しい座標軸周りの回転角(後述するオイラー角)とは異なる。

## (3) 固定角による座標系の回転

基準とする座標系I(o-x, y, z)から見た任意の座標系R(o-x<sub>R</sub>, y<sub>R</sub>, z<sub>R</sub>)及び座標系G(o-x<sub>G</sub>, y<sub>G</sub>, z<sub>G</sub>)の方向余弦マトリクスを下記のように表す。

$$\mathbf{D}_R^I = (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I)$$

$$\mathbf{D}_G^I = (\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I)$$

ここで式(1.2-7)に示した固定角によるベクトルの回転を適用して座標系R(o-x<sub>R</sub>, y<sub>R</sub>, z<sub>R</sub>)の座標軸単位ベクトル $\underline{x}_R^I, \underline{y}_R^I, \underline{z}_R^I$ を座標系Iにおいて回転し、得られた軸を新たに座標系G(o-x<sub>G</sub>, y<sub>G</sub>, z<sub>G</sub>)の座標軸単位ベクトル $\underline{x}_G^I, \underline{y}_G^I, \underline{z}_G^I$ とすれば、それらは下記のように表される。

$$\underline{x}_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{x}_R^I$$

$$\underline{y}_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{y}_R^I$$

$$\underline{z}_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{z}_R^I$$

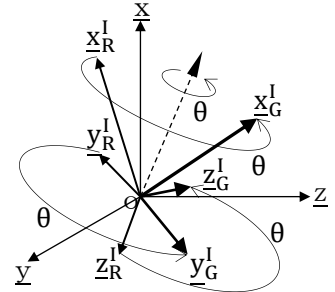


図1.2-2 固定角による座標系の回転

上記の3式をまとめてマトリクス表現にすると、

$$(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I) = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I) \cdots \cdots (1.2-8)$$

$$\mathbf{D}_G^I = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{D}_R^I \cdots \cdots (1.2-9)$$

この両辺に右から $\mathbf{D}_R^I$ の転置マトリクスを掛けて変形すると、

$$\mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$$

$$(\mathbf{D}_G^R)^I \equiv \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^R = [\theta_n]_p \cdots [\theta_3]_k \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdots \cdots (1.2-10)$$

$$(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I) = (\mathbf{D}_G^R)^I \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I) : \text{座標系の回転} \cdots \cdots (1.2-11)$$

この式(1.2-11)は固定角による座標系の回転を表す。 $(\mathbf{D}_G^R)^I$ は座標系Iから見たときの座標系Rから座標系Gへの回転マトリクスで、1.1-(4)項に示す方向余弦マトリクスによる座標系の回転を表す式(1.1-9)とは異なる。本書では次の形式のマトリクスを「固定角型回転マトリクス」と呼ぶこととする。

$$(\mathbf{D}_B^A)^R \equiv \mathbf{D}_B^R \cdot \mathbf{D}_A^{R^T}$$

R: 基準の座標系

$\mathbf{D}_A^R$ : 基準の座標系Rから見た座標系Aの方向余弦マトリクス

$\mathbf{D}_B^R$ : 基準の座標系Rから見た座標系Bの方向余弦マトリクス

次に、座標系Iから見たときの座標系Rを座標系Aへ回転し、さらに座標系Aから座標系Gへ回転する操作は、上記の式(1.2-11)の表記を用いて

$$(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) = (\mathbf{D}_A^R)^I \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I) \text{及び}$$

$$(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I) = (\mathbf{D}_G^A)^I \cdot (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \text{より}$$

$$(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I) = (\mathbf{D}_G^A)^I \cdot (\mathbf{D}_A^R)^I \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I) = (\mathbf{D}_G^R)^I \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I)$$

よって、座標系Iから見たときの座標系Rを座標系Aへ回転させ、さらに座標系Aから座標系Gへ回転させる固定角型回転マトリクスは次のように表される。

$$(\mathbf{D}_G^R)^I = (\mathbf{D}_G^A)^I \cdot (\mathbf{D}_A^R)^I \cdots \cdots (1.2-12)$$

## (4) オイラー角による座標系の回転

座標系I(o-x, y, z)から見た任意の座標系R(o-x<sub>R</sub>, y<sub>R</sub>, z<sub>R</sub>)の座標軸単位ベクトルを $\underline{x}_R^I, \underline{y}_R^I, \underline{z}_R^I$ で表したとき、x<sub>R</sub>軸回りに角度φ<sub>1</sub>だけ回転してできる座標系を座標系A(o-x<sub>A</sub>, y<sub>A</sub>, z<sub>A</sub>)とすると、新たにできた座標系



の座標軸単位ベクトルは以下のように表される。

$$\begin{aligned}\underline{x}_A^I &= \underline{x}_R^I \\ \underline{y}_A^I &= \cos \varphi_1 \cdot \underline{y}_R^I + \sin \varphi_1 \cdot \underline{z}_R^I \\ \underline{z}_A^I &= -\sin \varphi_1 \cdot \underline{y}_R^I + \cos \varphi_1 \cdot \underline{z}_R^I\end{aligned}$$

上式をまとめると、回転後の座標系は1.2-(2)項に示した回転マトリクスを用いて下記のように表現される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdots (1.2-13)$$

上記の座標系の回転は、 $y_R$ 軸及び $z_R$ 軸についても考えられるので、一般的には何れかの軸回りに角度  $\varphi_1$ だけ回転してできる座標系を下記のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdots (1.2-14)$$

ここで、 $i=1$  or  $2$  or  $3$

上式の回転マトリクスは座標系R( $O-x_R, y_R, z_R$ )から見た座標系A( $O-x_A, y_A, z_A$ )の各成分(方向余弦)をマトリクスにまとめたものであり、1.1-(4)項に示した方向余弦マトリクスとして下記で表される。

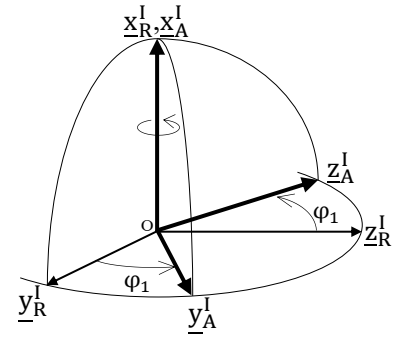


図1.2-3 座標系の回転

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{x}_R^I \\ \underline{x}_A^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{y}_R^I \\ \underline{x}_A^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{z}_R^I \end{pmatrix} = [\varphi_1]_i \cdots (1.2-15)$$

よって、上記式(1.2-11)の座標系の回転は、方向余弦マトリクスでは下記のように表現される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdots (1.2-16)$$

次に、回転してできた新しい座標系を基準として $x_A, y_A, z_A$ のいずれかの軸回りに角度  $\varphi_2$ だけ回転してできる座標系を座標系B( $O-x_B, y_B, z_B$ )とすると、上記と同様に新たにできた座標系は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{x}_B^I & \underline{y}_B^I & \underline{z}_B^I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I & \underline{y}_A^I & \underline{z}_A^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_2]_j \\ &= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j\end{aligned}$$

このように、順次新しくできた座標系の軸回りに回転を続け、最終的に座標系G( $O-x_G, y_G, z_G$ )が得られるとすると、それは下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \cdots (1.2-17)$$

これを方向余弦マトリクスで表現して

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_G^I &= \mathbf{D}_R^I \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \\ &= \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \cdots \mathbf{D}_G^F \cdots (1.2-18)\end{aligned}$$

また、座標系Rから座標系Gまでの回転を表すマトリクスは、上式の両辺に左から $\mathbf{D}_R^I$ の転置マトリクスを掛けて変形して下記のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_G^I &= \mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_R^I \cdot [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \\ \mathbf{D}_G^R &\equiv \mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_G^I = \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_G^I = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \cdots (1.2-19)\end{aligned}$$

この回転を表すマトリクス $\mathbf{D}_G^R$ は前記(3)項に示した固定角型回転マトリクス( $\mathbf{D}_G^R$ )<sup>I</sup>とは異なり、座標系Rから見た座標系Gの方向余弦マトリクスである。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_G^R : \text{座標系の回転} \cdots (1.2-20) \\ \mathbf{D}_G^R &= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x}_G^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{x}_R^I \\ \underline{x}_G^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{y}_R^I \\ \underline{x}_G^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{z}_R^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_G^R & \underline{y}_G^R & \underline{z}_G^R \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.2-21)$$

### 1.3 座標変換

図1.3-1に示した任意のベクトル $\mathbf{a}$ は、慣性座標系 $(O-x, y, z)$ で下記のように表される。

$$\mathbf{a} = a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} \cdots \cdots \cdots (1.3-1)$$

次に、座標系 $R(O-x_R, y_R, z_R)$ を $x_R$ 軸回りに角度 $\varphi$ だけ回転して得られる座標系を座標系 $A(O-x_A, y_A, z_A)$ としたとき、ベクトル $\mathbf{a}$ は座標系 $A$ で下記のように表される。

$$\mathbf{a} = a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} = a_{x_A} \underline{x}_A + a_{y_A} \underline{y}_A + a_{z_A} \underline{z}_A \text{より}$$

$$\mathbf{a}^A \equiv \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos \beta \\ a \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1.3-2)$$

また、ベクトル $\mathbf{a}$ は座標系 $R$ では下記のように表される。

$$\mathbf{a} = a_x \underline{x} + a_y \underline{y} + a_z \underline{z} = a_{x_R} \underline{x}_R + a_{y_R} \underline{y}_R + a_{z_R} \underline{z}_R \text{より}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^R \equiv \begin{pmatrix} a_{x_R} \\ a_{y_R} \\ a_{z_R} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \cos(\beta + \varphi) \\ a \sin \alpha \sin(\beta + \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha (\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi) \\ a \sin \alpha (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \cos \varphi - a_{z_A} \sin \varphi \\ a_{z_A} \cos \varphi + a_{y_A} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}^A \\ &= [\varphi]_1 \cdot \mathbf{a}^A \end{aligned}$$

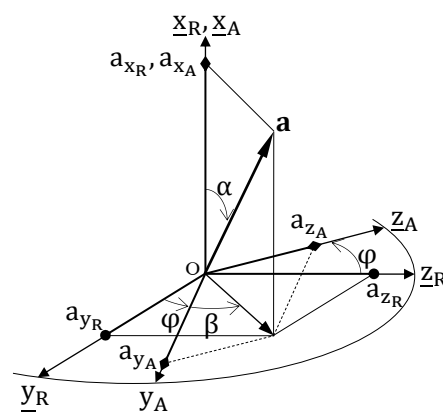


図1.3-1 ベクトルの座標変換

座標系 $R$ を $n$ 回連続して回転して座標系 $A$ が得られるものとする、

$$\mathbf{a}^R = [\varphi_1]_i \cdot \mathbf{a}^{A1}$$

$$\mathbf{a}^{A1} = [\varphi_2]_j \cdot \mathbf{a}^{A2}$$

⋮

$$\mathbf{a}^{An-1} = [\varphi_n]_p \cdot \mathbf{a}^A$$

$$\mathbf{a}^R = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p \cdot \mathbf{a}^A \cdots \cdots \cdots (1.3-3)$$

この回転マトリクスは座標系 $R$ から見た座標系 $A$ の方向余弦マトリクスでもあるから、上式は一般的に下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}^A = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{a}^A \cdots \cdots \cdots (1.3-4)$$

上記は座標軸ベクトルを用いて下記のように表現することができる。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R & \underline{y}_R & \underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x_R} \\ a_{y_R} \\ a_{z_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A & \underline{y}_A & \underline{z}_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} a_{x_R} \\ a_{y_R} \\ a_{z_R} \end{pmatrix} = (\underline{x}_R \quad \underline{y}_R \quad \underline{z}_R)^T \cdot (\underline{x}_A \quad \underline{y}_A \quad \underline{z}_A) \cdot \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_A^R \cdot \begin{pmatrix} a_{x_A} \\ a_{y_A} \\ a_{z_A} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1.3-5)$$

このように、上記の式(1.3-3)、式(1.3-4)および式(1.3-5)はベクトル $\mathbf{a}$ を座標系Aの座標軸成分で表した量から座標系Rの座標軸成分で表した量に変換するもので、座標変換と呼ばれる。

同様に、座標系A( $o-x_A, y_A, z_A$ )を回転して得られる座標系を座標系B( $o-x_B, y_B, z_B$ )としたとき、ベクトル $\mathbf{a}$ は座標系Aで下記のように表される。

$$\mathbf{a}^A = (\underline{x}_B^A \quad \underline{y}_B^A \quad \underline{z}_B^A) \cdot \mathbf{a}^B = \mathbf{D}_B^A \cdot \mathbf{a}^B \dots\dots\dots (1.3-6)$$

従って、このような座標変換を繰り返すと、下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}^R = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{a}^A = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \cdot \mathbf{a}^B = \dots\dots = \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \dots\dots \mathbf{D}_G^F \cdot \mathbf{a}^G \dots\dots\dots (1.3-7)$$

よって、ベクトルの座標変換は一般的に、1.2-(4)項に示した座標系間の回転を表す方向余弦マトリクスを用いて、下記のように表現される。

$$\mathbf{a}^R = \mathbf{D}_G^R \cdot \mathbf{a}^G : \text{ベクトルの座標変換} \dots\dots\dots (1.3-8)$$

ここで、 $\mathbf{D}_G^R$  : 座標系Rから見た座標系Gの方向余弦マトリクス

$\mathbf{a}^R$  : 座標系Rから見たベクトル $\mathbf{a}$

$\mathbf{a}^G$  : 座標系Gから見たベクトル $\mathbf{a}$

## 1.4 回転マトリクスの合成

回転マトリクスや方向余弦マトリクスおよび後述する四元数は、四則演算が自由に行える代数系で「体」と呼ばれる。これらの「体」は乗法において順序が入れ換えられない「非可換体」である。本書ではこれらを「体(非可換体)」と呼ぶこととする。

1.2(2)項の回転マトリクスはオイラー角順あるいは固定角順に合成され、下記の3種類の体(非可換体)が考えられる。なお、固定角は補足5.1項に示した方法でオイラー角から変換できる。

(1)  $\mathbf{D}_R^I = [\varphi_1]_i \cdot [\varphi_2]_j \cdots [\varphi_n]_p$  : 方向余弦マトリクス

$$\mathbf{D}_G^R = \mathbf{D}_R^{I^T} \cdot \mathbf{D}_G^I : \text{方向余弦マトリクス}$$

上記は座標系の回転とベクトルの座標変換に利用できる。

(2)  $(\mathbf{D}_G^R)^I = \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T}$  : 固定角型回転マトリクス

上記は座標系の回転とベクトルの回転に利用できる。

(3)  $(\mathbf{D}_G^R) = [\theta_n]_p \cdots [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i$  : 固定角順回転マトリクス

上記は座標系の回転とベクトルの回転および、ベクトルの座標変換に利用できる。

## 2 姿勢の回転の表現

### 2.1 ロドリゲスの回転公式

任意の3次元直交座標系を $(o - \underline{e}, \underline{f}, \underline{g})$ とし、座標軸単位ベクトルを $\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}$ としたとき、任意のベクトル $\underline{a}$ は次のように表される。

$$\underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} + (\underline{a} \cdot \underline{f})\underline{f} + (\underline{a} \cdot \underline{g})\underline{g} = \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.1-1)$$

このベクトル $\underline{a}$ を $\underline{e}$ 軸回りに角度 $\theta$ だけ回転したベクトル $\underline{a}'$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{a} \cdot \underline{g} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

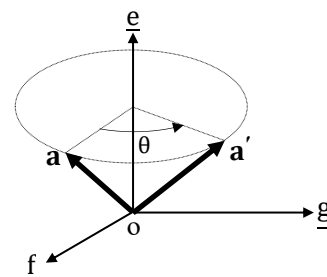


図2.1-1 姿勢の回転

座標軸単位ベクトル間の外積には次のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \underline{e} &= \underline{f} \times \underline{g}, & \underline{e} &= -\underline{g} \times \underline{f}, & \underline{e} \times \underline{e} &= \mathbf{0} \\ \underline{f} &= \underline{g} \times \underline{e}, & \underline{f} &= -\underline{e} \times \underline{g}, & \underline{f} \times \underline{f} &= \mathbf{0} \\ \underline{g} &= \underline{e} \times \underline{f}, & \underline{g} &= -\underline{f} \times \underline{e}, & \underline{g} \times \underline{g} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} : \text{座標軸単位ベクトルの外積関係}$$

この関係を用いると、上記右辺第3項のカッコ内は次のように表される。

$$\underline{e} \times \underline{a} = \underline{e} \times \{(\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} + (\underline{a} \cdot \underline{f})\underline{f} + (\underline{a} \cdot \underline{g})\underline{g}\} = (\underline{a} \cdot \underline{f})\underline{g} - (\underline{a} \cdot \underline{g})\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{a} \cdot \underline{g} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \end{pmatrix}$$

よって、ベクトル $\underline{a}'$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \left\{ \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \\ \underline{a} \cdot \underline{g} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{a} \cdot \underline{e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{a} \cdot \underline{g} \\ \underline{a} \cdot \underline{f} \end{pmatrix} \\ &= (\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} + \cos\theta \{\underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e}\} + \sin\theta (\underline{e} \times \underline{a}) \dots\dots\dots (2.1-2) \end{aligned}$$

ここで、ベクトル3重積  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$  を変形して  $(\underline{b} \cdot \underline{a})\underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$

さらに、座標軸単位ベクトルが正規直交基底のベクトルなので次の内積の関係が成り立ち、これを用いて式(2.1-2)を変形すると、

$\underline{e} \cdot \underline{e} = 1, \underline{f} \cdot \underline{f} = 1, \underline{g} \cdot \underline{g} = 1, \underline{e} \cdot \underline{f} = 0, \underline{e} \cdot \underline{g} = 0, \underline{f} \cdot \underline{g} = 0$  : 座標軸単位ベクトルの内積関係

$(\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} = (\underline{e} \cdot \underline{e})\underline{a} - \underline{e} \times (\underline{a} \times \underline{e}) = (\underline{e} \cdot \underline{e})\underline{a} + \underline{e} \times (\underline{e} \times \underline{a}) = \underline{a} + [\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a}$  となるから、

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{a} + [\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a} + \cos\theta \{\underline{a} - \underline{a} - [\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a}\} + \sin\theta [\underline{e} \times] \cdot \underline{a} \\ &= \underline{a} + (1 - \cos\theta)[\underline{e} \times]^2 \cdot \underline{a} + \sin\theta [\underline{e} \times] \cdot \underline{a} \\ &= \{1 + \sin\theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos\theta)[\underline{e} \times]^2\} \cdot \underline{a} \dots\dots\dots (2.1-3) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  : 単位マトリクス

$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$  : 回転軸ベクトル

$$[\underline{e} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} : \text{歪対象マトリクス (skew symmetric matrix)} \dots\dots\dots (2.1-4)$$

$$\begin{aligned}
[\underline{e} \times]^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_y^2 - e_z^2 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & -e_z^2 - e_x^2 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & -e_x^2 - e_y^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_x^2 - 1 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & e_y^2 - 1 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x^2 & e_y e_x & e_z e_x \\ e_x e_y & e_y^2 & e_z e_y \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 \end{pmatrix} - \mathbf{1} \cdots \cdots (2.1-5)
\end{aligned}$$

この式(2.1-3)はロドリゲスの回転公式と呼ばれる。

## 2.2 回転ベクトル

### (1) オイラー軸

回転軸ベクトル $\underline{e}$ は次の条件を満たすベクトルで、図2.1-1の $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ 面の2等分線を含み $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ 面に垂直な面内にある。

$$\underline{e} \cdot \mathbf{a} = \underline{e} \cdot \mathbf{a}' \cdots \cdots (2.2-1)$$

基準の慣性座標系Iを $(x, y, z)$ とし、 $\underline{e}$ 軸周りに角度 $\theta$ だけ回転して得られる回転座標系Bを $(x_B, y_B, z_B)$ とし、上記の式の $\mathbf{a}$ 及び $\mathbf{a}'$ に座標軸単位ベクトルを順次代入すると次式が得られる。

$$\underline{e} \cdot \underline{x} = \underline{e} \cdot \underline{x}_B, \quad \underline{e} \cdot \underline{y} = \underline{e} \cdot \underline{y}_B, \quad \underline{e} \cdot \underline{z} = \underline{e} \cdot \underline{z}_B \cdots \cdots (2.2-2)$$

従って、 $\underline{e}$ 軸はそれぞれ $\underline{x} - \underline{x}_B$ 面、 $\underline{y} - \underline{y}_B$ 面、 $\underline{z} - \underline{z}_B$ 面に垂直なベクトルであるから、それら3平面に垂直なベクトルを求めて正規化(単位ベクトルに)して、次のように表すことができる。

$$\underline{e} = \frac{(\underline{x} - \underline{x}_B) \times (\underline{y} - \underline{y}_B) + (\underline{y} - \underline{y}_B) \times (\underline{z} - \underline{z}_B) + (\underline{z} - \underline{z}_B) \times (\underline{x} - \underline{x}_B)}{\left| (\underline{x} - \underline{x}_B) \times (\underline{y} - \underline{y}_B) + (\underline{y} - \underline{y}_B) \times (\underline{z} - \underline{z}_B) + (\underline{z} - \underline{z}_B) \times (\underline{x} - \underline{x}_B) \right|} \cdots \cdots (2.2-3)$$

ゆえに、式(2.2-2)を同時に満たす $\underline{e}$ 軸は基準座標系Iと回転座標系Bが等しくないときには必ず存在し、これをオイラー軸と呼び、その周りの回転角 $\theta$ で回転体の3軸周りの回転を表現する。

式(2.2-2)をまとめて表現し、慣性座標系Iが標準基底の座標軸として $(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) = [\mathbf{1}]$ となるのを代入すると、

$$\begin{aligned}
(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot \underline{e} &= (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B)^T \cdot \underline{e} \\
\underline{e} &= (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B)^T \cdot \underline{e} = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \underline{e} = \mathbf{D}_I^B \cdot \underline{e} \\
\underline{e} &= \mathbf{D}_I^B \cdot \underline{e} : \underline{e} \text{軸の慣性座標系Iから回転座標系Bへの座標変換} \cdots \cdots (2.2-4)
\end{aligned}$$

### (2) 回転ベクトル

慣性座標系Iを $(x, y, z)$ とし、その座標系を回転軸ベクトル $\underline{e}$ 周りに角度 $\theta$ だけ回転して得られる回転座標系Bを $(x_B, y_B, z_B)$ としたとき、ロドリゲスの回転公式(2.1-3)の $\mathbf{a}$ 及び $\mathbf{a}'$ にそれぞれの座標軸単位ベクトルを順次代入すると、慣性座標系Iから回転座標系Bへの回転を表す式が次のように得られる。

$$(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) = \mathbf{D}_B^I \cdot (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}) \cdots \cdots (2.2-5)$$

$$\mathbf{D}_B^I = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} : \text{回転マトリクス} \cdots \cdots (2.2-6)$$

ここで、慣性座標系Iを表すマトリクス $(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})$ は単位マトリクス $[\mathbf{1}]$ となって省略して表記できるので、式(2.2-5)の回転マトリクスは慣性座標系Iから見た回転座標系Bの方向余弦マトリクスを表し、その各列は回転座標系B $(x_B, y_B, z_B)$ の各軸単位ベクトルを表す。

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{慣性座標系各軸単位ベクトル}$$

$$\mathbf{D}_B^I = (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} : \text{慣性座標系Iから見た回転座標系Bの方向余弦マトリクス}$$

式(2.2-6)の回転マトリクスを展開して、

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix} = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (1 - c)(e_x^2 - 1) & (1 - c)e_y e_x - s e_z & (1 - c)e_z e_x + s e_y \\ (1 - c)e_x e_y + s e_z & 1 + (1 - c)(e_y^2 - 1) & (1 - c)e_z e_y - s e_x \\ (1 - c)e_x e_z - s e_y & (1 - c)e_y e_z + s e_x & 1 + (1 - c)(e_z^2 - 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c + (1 - c)e_x^2 & (1 - c)e_y e_x - s e_z & (1 - c)e_z e_x + s e_y \\ (1 - c)e_x e_y + s e_z & c + (1 - c)e_y^2 & (1 - c)e_z e_y - s e_x \\ (1 - c)e_x e_z - s e_y & (1 - c)e_y e_z + s e_x & c + (1 - c)e_z^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.2-7) \end{aligned}$$

ここで、

$$\underline{e} \equiv \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = e_x \underline{x} + e_y \underline{y} + e_z \underline{z} = e_x \underline{x}_B + e_y \underline{y}_B + e_z \underline{z}_B = \underline{e}_B : \text{オイラー軸} \dots\dots\dots(2.2-8)$$

$\theta$  : オイラー軸周りの回転角

$$s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta$$

上記のオイラー軸とその周りの回転角を用いて、下記の回転ベクトルを定義することができる。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \theta \underline{e} : \text{回転ベクトル} \dots\dots\dots(2.2-9)$$

ここで、 $\underline{e}$  : オイラー軸ベクトル

$\theta$  : オイラー軸周りの回転角

オイラー軸ベクトルは、上記の回転ベクトルを用いて下記のように表すことができる。

$$\underline{e} \equiv \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_x / \theta \\ \theta_y / \theta \\ \theta_z / \theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.2-10)$$

式(2.2-9)を式(2.2-7)に代入すると、回転ベクトルによって座標系の方向余弦マトリクスを表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} = \left\{ \mathbf{1} + \frac{\sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta} \times] + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta} \times]^2 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} c + \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_x^2 & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_y \theta_x - \frac{s}{\theta} \theta_z & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_z \theta_x + \frac{s}{\theta} \theta_y \\ \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_x \theta_y + \frac{s}{\theta} \theta_z & c + \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_y^2 & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_z \theta_y - \frac{s}{\theta} \theta_x \\ \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_x \theta_z - \frac{s}{\theta} \theta_y & \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_y \theta_z + \frac{s}{\theta} \theta_x & c + \frac{1 - c}{\theta^2} \theta_z^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.2-11) \end{aligned}$$

上記から、方向余弦と回転ベクトルの関係が次式で表すことができる。

$$\cos \theta = \frac{d_{11} + d_{22} + d_{33} - 1}{2} \dots\dots\dots(2.2-12)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(d_{32} - d_{23})^2 + (d_{13} - d_{31})^2 + (d_{21} - d_{12})^2}}{2} \dots\dots\dots(2.2-13)$$

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} = \frac{\theta}{2 \sin \theta} \begin{pmatrix} d_{32} - d_{23} \\ d_{13} - d_{31} \\ d_{21} - d_{12} \end{pmatrix} : \text{回転ベクトル} \dots\dots\dots(2.2-14)$$

### (3) 回転ベクトルの微係数

次に、慣性座標系に対する回転座標系の回転角速度を次のように表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \quad \cdots \cdots \cdots (2.2-15)$$

オイラー軸 $\underline{e}$ は式(2.2-4)を変形して次のようにも表されるから、

$$\underline{e} = \mathbf{D}_B^I \cdot \underline{e}_B \quad \cdots \cdots \cdots (2.2-16)$$

これを微分して

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\mathbf{D}}_B^I \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e}_B + \dot{\underline{e}}_B)$$

ここで、単位ベクトルの微分値は単位ベクトルにはならないので、表現を次のように書き換えて、

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\mathbf{D}}_B^I \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}} = \mathbf{D}_B^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e}_B + \dot{\underline{e}}) \quad \cdots \cdots \cdots (2.2-17)$$

ここで、 $\underline{e} = \underline{e}_B$ であるから上式を変形すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \dot{\underline{e}} &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e} + \dot{\underline{e}} \\ (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \dot{\underline{e}} - \dot{\underline{e}} &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e} \\ \{ \mathbf{1} - (\mathbf{D}_B^I)^T \} \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \quad \text{これに式(2.2-6)を代入して、} \\ \left[ \mathbf{1} - \{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \}^T \right] \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \left[ \mathbf{1} - \{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times]^T + (1 - \cos \theta) ([\underline{e} \times]^2)^T \} \right] \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \{ \sin \theta [\underline{e} \times] - (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \} \cdot \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \sin \theta (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) - (1 - \cos \theta) \underline{e} \times (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \end{aligned}$$

ベクトル3重積  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  より、

$$\sin \theta (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) - (1 - \cos \theta) \{ (\underline{e} \cdot \dot{\underline{e}})\underline{e} - (\underline{e} \cdot \underline{e})\dot{\underline{e}} \} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$

さらに、ベクトル $\underline{e}$ が一定の大きさ1なので変化率 $\dot{\underline{e}}$ が $\underline{e}$ に垂直になることから  $\underline{e} \cdot \dot{\underline{e}} = 0$ 、 $\underline{e} \cdot \underline{e} = 1$  より、

$$\begin{aligned} \sin \theta (\underline{e} \times \dot{\underline{e}}) + (1 - \cos \theta) \dot{\underline{e}} &= \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B \\ \{ (1 - \cos \theta) \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] \} \cdot \dot{\underline{e}} &= [\underline{e} \times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ \dot{\underline{e}} &= \{ (1 - \cos \theta) \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] \}^{-1} \cdot [\underline{e} \times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta e_z & \sin \theta e_y \\ \sin \theta e_z & 1 - \cos \theta & -\sin \theta e_x \\ -\sin \theta e_y & \sin \theta e_x & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \cdot [\underline{e} \times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B \quad \text{ここで、} s = \sin \theta, c = \cos \theta \text{ において、} \\ &= \frac{1}{2(1 - c)^2} \begin{pmatrix} (1 - c)^2 + s^2 e_x^2 & s^2 e_x e_y + s(1 - c)e_z & s^2 e_x e_z - s(1 - c)e_y \\ s^2 e_x e_y - s(1 - c)e_z & (1 - c)^2 + s^2 e_y^2 & s^2 e_y e_z + s(1 - c)e_x \\ s^2 e_x e_z + s(1 - c)e_y & s^2 e_y e_z - s(1 - c)e_x & (1 - c)^2 + s^2 e_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1 - c)^2} \begin{pmatrix} s(1 - c)(e_y^2 + e_z^2) & -s(1 - c)e_x e_y - (1 - c)^2 e_z & -s(1 - c)e_x e_z + (1 - c)^2 e_y \\ -s(1 - c)e_x e_y + (1 - c)^2 e_z & s(1 - c)(e_z^2 + e_x^2) & -s(1 - c)e_y e_z - (1 - c)^2 e_x \\ -s(1 - c)e_x e_z - (1 - c)^2 e_y & -s(1 - c)e_y e_z + (1 - c)^2 e_x & s(1 - c)(e_x^2 + e_y^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1 - c)} \begin{pmatrix} s(e_y^2 + e_z^2) & -se_x e_y - (1 - c)e_z & -se_x e_z + (1 - c)e_y \\ -se_x e_y + (1 - c)e_z & s(e_z^2 + e_x^2) & -se_y e_z - (1 - c)e_x \\ -se_x e_z - (1 - c)e_y & -se_y e_z + (1 - c)e_x & s(e_x^2 + e_y^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1 - c)} \left\{ (1 - c) \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} e_x^2 - 1 & e_x e_y & e_x e_z \\ e_x e_y & e_y^2 - 1 & e_y e_z \\ e_x e_z & e_y e_z & e_z^2 - 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2(1 - c)} \{ (1 - c) [\underline{e} \times] - s [\underline{e} \times]^2 \} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\underline{e} \times] - \frac{s}{1 - c} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \end{aligned}$$

ここで  $\frac{s}{1 - c} = \cot \frac{\theta}{2}$  より

$$\dot{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left\{ [\underline{e} \times] - \cot \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \quad \cdots \cdots \cdots (2.2-18)$$

また、オイラー軸周りの回転ベクトルの微係数は、オイラー軸の定義より下記で表される。

$$\dot{\theta} = \omega_B \cdot \underline{e} \cdots \cdots \cdots (2.2-19)$$

オイラー軸は  $\theta=0$  に特異点を持ち、その時のオイラー軸とその周りの回転角並びにその微係数は下記と見なすことができる。

$$\underline{e} = \frac{\omega_B}{|\omega_B|}, \theta = 0, \dot{\underline{e}} = \mathbf{0}, \dot{\theta} = |\omega_B| \cdots \cdots \cdots (2.2-20)$$

式(2.2-9)の回転ベクトルの微分は、式(2.2-19)及び式(2.2-18)を代入して

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\theta} \underline{e} + \theta \dot{\underline{e}} \\ &= (\omega_B \cdot \underline{e}) \underline{e} + \theta \left\{ \frac{1}{2} ([\underline{e} \times] - \cot \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2) \cdot \omega_B \right\} \end{aligned}$$

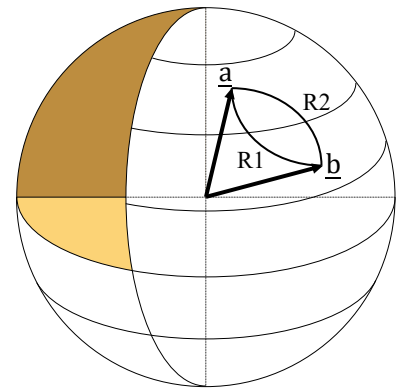
右辺第1項にベクトル3重積  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$  を適用して

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\underline{e} \cdot \underline{e}) \omega_B - \underline{e} \times (\omega_B \times \underline{e}) + \frac{\theta}{2} \left( \underline{e} \times \omega_B - \cot \frac{\theta}{2} \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) \right) \\ &= \omega_B + \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) + \frac{\theta}{2} \left( \underline{e} \times \omega_B - \cot \frac{\theta}{2} \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) \right) \\ &= \omega_B + \frac{\theta}{2} (\underline{e} \times \omega_B) + \left( 1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right) \{ \underline{e} \times (\underline{e} \times \omega_B) \} \end{aligned}$$

ここでオイラー軸を回転ベクトルに直すと下記のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_B + \frac{1}{2} (\theta \times \omega_B) + \frac{1}{\theta^2} \left( 1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right) \{ \theta \times (\theta \times \omega_B) \} \\ &= \omega_B + \frac{1}{2} (\theta \times \omega_B) + \frac{1}{\theta^2} \left( 1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) \{ \theta \times (\theta \times \omega_B) \} \\ &= \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2} [\theta \times] + \frac{1}{\theta^2} \left( 1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\theta \times]^2 \right\} \cdot \omega_B \cdots \cdots \cdots (2.2-21) \end{aligned}$$

上記の右辺第2項以降は非可換な角速度 (Non Commutativity rate) と呼ばれ、回転座標系の回転角速度  $\omega_B$  が回転ベクトル  $\theta$  と並行でない (両ベクトルの外積がゼロでない) ときに発生するので、回転ベクトル  $\theta$  の初期値が異なると回転角速度  $\omega_B$  が同じでも上式(2.2-21)の積分は異なる結果となる。従って、式(2.2-21)は過去の回転の結果が現在の回転に影響を与えるため、回転の時間的順序が変更できないことを意味しており、右図のベクトル  $\underline{a}$  (座標系の一つの軸ベクトルとする) が経路R1を通してベクトル  $\underline{b}$  へ回転してから経路R2を通して元の位置のベクトル  $\underline{a}$  へ戻った場合と、逆に先に経路R2を通してから経路R1を通して元のベクトル  $\underline{a}$  へ戻った場合とでは、ベクトル  $\underline{a}$  周りの回転 (座標系の回転) が異なることを意味している。



## 2.3 コーニング運動

慣性座標系Iを  $(o-x, y, z)$  として回転座標系Bを  $(o-x_B, y_B, z_B)$  としたとき、慣性座標系から見た回転座標系の回転は式(2.2-21)の回転ベクトルで表されるから、この式から逆に回転座標系の各軸周りの回転角速度を求めると下記で表される。

$$\omega_B = \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2} [\theta \times] + \frac{1}{\theta^2} \left( 1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right) [\theta \times]^2 \right\}^{-1} \cdot \dot{\theta} \cdots \cdots \cdots (2.3-1)$$



この逆マトリクスを補足5.2項に示したように解いて下記のように求められる。

$$\omega_B = \left\{ 1 - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\theta \times] + \frac{1}{\theta^2} \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta \times]^2 \right\} \cdot \dot{\theta} \dots \dots \dots (2.3-2)$$

ここで、 $\omega_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B$

慣性座標系に対して回転座標系が下記で定義されるコーニング運動を行っているとするとする。

$$\theta = \theta_y \underline{y} + \theta_z \underline{z} = \theta \sin \Omega t \underline{t}_y + \theta \cos \Omega t \underline{t}_z = \theta \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3-3)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_y \underline{y} + \dot{\theta}_z \underline{z} = \theta \Omega \cos \Omega t \underline{t}_y - \theta \Omega \sin \Omega t \underline{t}_z = \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3-4)$$

ここで、 $\theta$  : コーニング半頂角

$\Omega$  : コーニング角速度

このとき、回転座標系の各軸周りの回転角速度は式(2.3-2)に式(2.3-3)及び式(2.3-4)を代入して下記で表される。

$$\begin{aligned} \omega_B &= \left\{ 1 - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \theta \begin{pmatrix} 0 & -\cos \Omega t & \sin \Omega t \\ \cos \Omega t & 0 & 0 \\ -\sin \Omega t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta^2} \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \theta^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \Omega t - 1 & \sin \Omega t \cos \Omega t \\ 0 & \sin \Omega t \cos \Omega t & \cos^2 \Omega t - 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} \\ &= \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} - (1 - \cos \theta) \Omega \begin{pmatrix} -\cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \theta \Omega \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \sin^2 \Omega t - \cos \Omega t - \sin^2 \Omega t \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \cos^2 \Omega t - \sin \Omega t \cos^2 \Omega t + \sin \Omega t \end{pmatrix} \\ &= \theta \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \end{pmatrix} - (1 - \cos \theta) \Omega \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \Omega \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} \\ &= \Omega \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \cos \Omega t \\ -\sin \theta \sin \Omega t \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.3-5) \end{aligned}$$

コーニング半頂角 $\theta$ が微小角なら、

$$\omega_B \doteq \Omega \begin{pmatrix} \frac{\theta^2}{2} \\ \theta \cos \Omega t \\ -\theta \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

$$\omega_{x_B} \doteq \frac{1}{2} \theta^2 \Omega$$

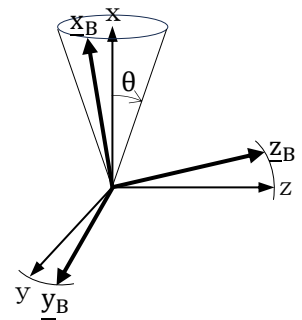


図2.3-1 コーニング運動

従って、回転座標系 $x_B$ 軸周りには回転を与えていないのに上記で示される一定の角速度が発生することになる。これはコーニングドリフトと呼ばれ、サーボテーブルにジャイロを搭載し、図2.3-1のようにサーボテーブルの2軸に式(2.3-2)の角振動を与えると、そのジャイロは式(2.3-5)の角速度を検知して出力することとなる。

上記の式(2.3-5)によれば、コーニングドリフトは図2.3-1に示した単位ベクトル $\underline{x}_B$ 軸の先端が描く円の面積( $\pi\theta^2$ )に比例することが分かる。

### 3 姿勢の計算法

#### 3.1 姿勢の表現方法

宇宙飛行体の姿勢は、宇宙飛行体に固定した座標系(ここでは機体座標系と呼ぶ)を定義し、1.1項に示したように、基準となる座標系(ここでは慣性座標系と呼ぶ)から見た機体座標系の方向余弦マトリクスとして表される。但し、方向余弦マトリクスは9個の要素から成って計算量が比較的多いので、姿勢を求める航法計算においては、要素数を減らした各種の方法が下記の表のように考案されている。

表3.1-1 姿勢の表現方法

名称		パラメータ数	特異点	特徴
方向余弦マトリクス		9	無し	9パラメータ(3つの座標軸ベクトル)のうち、6パラメータ(2つの座標軸ベクトル)を先ず求め、他の3パラメータ(残り1つの座標軸ベクトル)はベクトルの外積により求める。
オイラー角	3ジンバル オイラー角	3	有り	3ジンバル機構における隣り合うジンバル間の相対角であり、中間のジンバルが $-90$ 度回転した位置と $+90$ 度回転した位置に特異点がある。中間ジンバルがこの特異点の位置に来た状態をジンバル・ロックと呼び、3つのジンバル軸が同一平面に並んで、自由度が一つ無くなっている。
	4ジンバル オイラー角	4	無し	3ジンバル機構におけるジンバル・ロックを無くすため、もう1つのジンバルを追加して4ジンバル機構としたものである。通常は3ジンバルで運用しジンバル・ロックが発生する状態になると、最外ジンバルが急速に $180$ 度反転してジンバル・ロックの発生を回避する。この最外ジンバルの $180$ 度反転はジンバルフリップと呼ばれる。 H-Iロケット用プラットフォーム型慣性センサ・ユニットで採用された。補足5.3項に概要を示す。
四元数とその仲間たち	四元数 (クォータニオン、 オイラー・ パラメータ)	4	無し	姿勢の回転はオイラー軸ベクトルとその回りの回転角を用いて、1つのスカラー量と1つのベクトル量より成る数として表すことができるので、四元数(クォータニオン)という超複素数の実数部にスカラー量を、3種の虚数単位から成る虚数部にベクトル量を対比させ、その四元数の4つの実係数を求める方法である。
	ギブス・ベクター	3	有り	四元数の実数部が常に1となるように変形した方法で、オイラー軸回りの回転角が $\pm 180$ 度の位置に特異点がある。宇宙科学研究所のM-III S2型ロケットの姿勢基準装置に採用され、J-Iロケットではそれを引き継いで使用した。
	ケーリー・クライン (ケーリー数)	4 (複素数)	無し	2行2列の4個のマトリクスが四元数の実数部と超複素数に対応して演算規則を実現しており、それらマトリクスの4つの要素は1と0と通常の複素数 $i$ で構成されている。4個のマトリクスの実係数は四元数の実係数に対応し、計算は複素数演算で行う。

### 3.2 方向余弦マトリクス

#### (1) 方向余弦マトリクスの微係数

慣性座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x<sub>B</sub>, y<sub>B</sub>, z<sub>B</sub>)とし、慣性座標系Iから見た回転座標系Bの方向余弦マトリクスは式(1.1-11)に示したように、下記で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_B^I &= (\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})^T \cdot (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \cdot \underline{x} & \underline{y}_B \cdot \underline{x} & \underline{z}_B \cdot \underline{x} \\ \underline{x}_B \cdot \underline{y} & \underline{y}_B \cdot \underline{y} & \underline{z}_B \cdot \underline{y} \\ \underline{x}_B \cdot \underline{z} & \underline{y}_B \cdot \underline{z} & \underline{z}_B \cdot \underline{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{x}_{B_x} & \underline{y}_{B_x} & \underline{z}_{B_x} \\ \underline{x}_{B_y} & \underline{y}_{B_y} & \underline{z}_{B_y} \\ \underline{x}_{B_z} & \underline{y}_{B_z} & \underline{z}_{B_z} \end{pmatrix} = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) = (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \cdots \cdots (3.2-1) \end{aligned}$$

また、慣性座標系に対する回転座標系の回転角速度は次式で表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \cdots \cdots (3.2-2)$$

このとき、回転座標系の各軸ベクトルの微係数は、コリオリの表記を用いて次式で表される。ここで、回転座標系から見た回転座標系軸ベクトルの微係数はゼロである。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{x}_B + (\dot{\underline{x}}_B)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{x}_B = \omega_{z_B} \underline{y}_B - \omega_{y_B} \underline{z}_B \\ \dot{\underline{y}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{y}_B + (\dot{\underline{y}}_B)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{y}_B = \omega_{x_B} \underline{z}_B - \omega_{z_B} \underline{x}_B \\ \dot{\underline{z}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{z}_B + (\dot{\underline{z}}_B)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{z}_B = \omega_{y_B} \underline{x}_B - \omega_{x_B} \underline{y}_B \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3.2-3)$$

これらをまとめると、方向余弦マトリクスの微係数は下記のように表される。

$$\begin{aligned} (\dot{\underline{x}}_B \quad \dot{\underline{y}}_B \quad \dot{\underline{z}}_B) &= (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_B} & \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} & 0 & -\omega_{x_B} \\ -\omega_{y_B} & \omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix} = (\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B) \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \\ \dot{\mathbf{D}}_B^I &= \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \cdots \cdots (3.2-4) \end{aligned}$$

#### (2) 角度増分に基づく方向余弦マトリクスの更新

一般に、微分可能な関数は、次のようなテーラー級数に展開できる。

$$f(x) = f_{(x-h)} + hf'_{(x-h)} + \frac{h^2}{2!} f''_{(x-h)} + \frac{h^3}{3!} f'''_{(x-h)} + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_{(x-h)} \cdots \cdots (3.2-5)$$

ここで $\boldsymbol{\omega}_B$ 一定と見なせる微小時間における方向余弦マトリクスのn次微分は、式(3.2-4)より次のように表される。

$$\frac{d^n}{dt^n} (\mathbf{D}_B^I) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\mathbf{D}_B^I) \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} (\mathbf{D}_B^I) \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times]^2 = \cdots = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times]^n \cdots \cdots (3.2-6)$$

よって、微小時間を $\Delta T$ 、現時点をk、現時点より $\Delta T$ 前の時点をもk-1としたとき、方向余弦マトリクスは次のテーラー級数で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{B,k}^I &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I + \Delta T \dot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \frac{\Delta T^2}{2!} \ddot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \frac{\Delta T^3}{3!} \ddot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \cdots + \frac{\Delta T^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (\mathbf{D}_B^I)_{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I + \Delta T \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times] + \frac{\Delta T^2}{2!} \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^2 + \cdots + \frac{\Delta T^n}{n!} \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^n + \cdots \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \left( \mathbf{1} + \Delta T [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times] + \frac{\Delta T^2}{2!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^2 + \cdots + \frac{\Delta T^n}{n!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]^n + \cdots \right) \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot e^{\Delta T [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]} \cdots \cdots (3.2-7) \end{aligned}$$

ここでマトリクス指数関数 $e^{\Delta T [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times]}$ は推移マトリクスと呼ばれ、k-1時点からk時点までの $\Delta T$ 間の推移を表している。

座標系を順番に回転させて得られる方向余弦マトリクスは式(1.2-18)に示したように、次のように表される。

$$\mathbf{D}_{B,k}^I = \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1} \quad \dots\dots\dots (3.2-8)$$

ここで $\mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1}$ は式(3.2-7)の推移マトリクスと同じで、 $k-1$ 時点から $k$ 時点までの $\Delta T$ 間の回転座標系 $B$ の回転を表しており、その回転ベクトルは次式で表される。

$$\Delta\theta = \begin{pmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.2-9)$$

また、 $\mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1}$ は座標系 $(B,k-1)$ を基準の座標系としたときの座標系 $(B,k)$ の方向余弦マトリクスであって、上記の回転ベクトルで式(2.2-11)のように表されるので、回転後の方向余弦マトリクスは下記となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{B,k}^I &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \begin{pmatrix} c + \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_x^2 & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_y \Delta\theta_x - \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_z & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_z \Delta\theta_x + \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_y \\ \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_x \Delta\theta_y + \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_z & c + \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_y^2 & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_z \Delta\theta_y - \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_x \\ \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_x \Delta\theta_z - \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_y & \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_y \Delta\theta_z + \frac{s}{\Delta\theta} \Delta\theta_x & c + \frac{1-c}{\Delta\theta^2} \Delta\theta_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \begin{pmatrix} c + c_n \Delta\theta_x^2 & c_n \Delta\theta_y \Delta\theta_x - s_n \Delta\theta_z & c_n \Delta\theta_z \Delta\theta_x + s_n \Delta\theta_y \\ c_n \Delta\theta_x \Delta\theta_y + s_n \Delta\theta_z & c + c_n \Delta\theta_y^2 & c_n \Delta\theta_z \Delta\theta_y - s_n \Delta\theta_x \\ c_n \Delta\theta_x \Delta\theta_z - s_n \Delta\theta_y & c_n \Delta\theta_y \Delta\theta_z + s_n \Delta\theta_x & c + c_n \Delta\theta_z^2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.2-10) \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} \Delta\theta = |\Delta\theta| = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$$

$$\begin{aligned} c &= \cos \Delta\theta \\ s_n &= \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \quad \dots\dots\dots (3.2-11) \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta^2} \quad \dots\dots\dots (3.2-12)$$

### 3.3 オイラー角

オイラー角による姿勢計算は、一般には3ジンバルオイラー角が用いられる。H-Iロケットにおいては、3ジンバルオイラー角が有する特異点(ジンバルロックと称される)を回避できる4ジンバルオイラー角の慣性センサ装置が採用された。4ジンバルオイラー角については補足5.3項で概説する。

#### (1) 方向余弦マトリクスとオイラー角

慣性座標系Iを( $o-x, y, z$ )、回転座標系Bを( $o-x_B, y_B, z_B$ )としたとき、座標系Iを $x$ 軸周りに角度  $\theta_1$ 回転させ、新しくできた座標系( $o-x, y', z'$ )の $y'$ 軸周りに角度  $\theta_2$ 回転させ、さらに新しくできた座標系( $o-x'', y', z''$ )の $z''$ 軸周りに角度  $\theta_3$ 回転させてできた座標系を座標系Bとすると、座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクスは1.2-(4)項に示したように、下記で表される。

$$(\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) = (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z}) \cdot [\theta_1]_1 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_3 \cdots (3.3-1)$$

$$\mathbf{D}_B^I \equiv (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z})^T \cdot (\underline{x}_B \ \underline{y}_B \ \underline{z}_B) \\ = [\theta_1]_1 \cdot [\theta_2]_2 \cdot [\theta_3]_3 \cdots (3.3-2)$$

このように、2つの座標系の関係を3回の回転で表したとき、この3つの角度はオイラー角と呼ばれる。

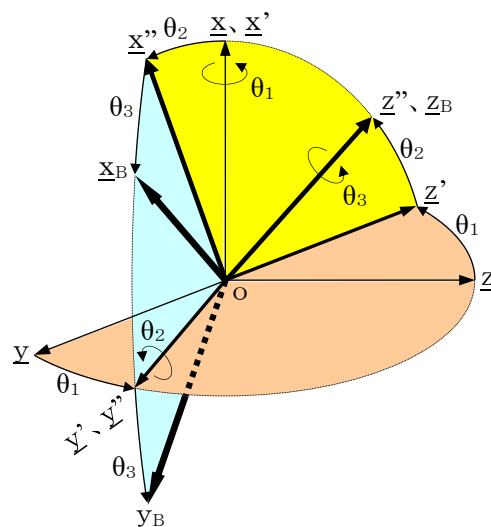


図3.3-1 オイラー角

上記の回転の順序は任意に選べるから、一般的には方向余弦マトリクスはオイラー角を用いて下記で表される。

$$\mathbf{D}_B^I \equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdots (3.3-3)$$

ここで $i, j, k$ は何番目の座標軸で回転させるかを表し、それぞれ1、2、3の何れかを示す。

それらの組み合わせは、隣同士が異なるものが $3 \times 2 \times 2 = 12$ 通りあり、式(3.3-3)を展開するとオイラー角から方向余弦マトリクスへの変換式が得られ、それらを表3.3-1に示す。

また、逆方向に、方向余弦マトリクスからオイラー角への変換は、表3.3-1の方向余弦マトリクスから回転順のオイラー角として表3.3-2のように求められる。回転順のオイラー角を座標軸順に並べ替えたオイラー角は表3.3-3のように求められる。なお、ここでは慣性座標系I( $o-x, y, z$ )を基準として回転座標系B( $o-x_B, y_B, z_B$ )への回転を表すオイラー角としているが、任意の基準座標系と任意の回転座標系に読み替えても良い。

表3.3-1 オイラー角から方向余弦マトリクスへの変換

No.	i, j, k	方向余弦マトリクス $\mathbf{D}_B^I = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$		
1	1, 2, 3	$c\theta_2 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_2$ $-s\theta_1 c\theta_2$ $c\theta_1 c\theta_2$
2	2, 3, 1	$c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_2$ $-s\theta_1 c\theta_2$	$-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $-c\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
3	3, 1, 2	$-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $-c\theta_2 s\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_2$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$
4	3, 2, 1	$c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_1 c\theta_2$ $-s\theta_2$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$
5	1, 3, 2	$c\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$-s\theta_2$ $c\theta_1 c\theta_2$ $s\theta_1 c\theta_2$	$c\theta_2 s\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
6	2, 1, 3	$s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_2 s\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_1 c\theta_2$ $-s\theta_2$ $c\theta_1 c\theta_2$
7	1, 2, 1	$c\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$ $-c\theta_1 s\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_2 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$
8	2, 3, 2	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_2 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$	$c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
9	3, 1, 3	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_2 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$ $-c\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$
10	3, 2, 3	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-s\theta_2 c\theta_3$	$-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$
11	1, 3, 1	$c\theta_2$ $c\theta_1 s\theta_2$ $s\theta_1 s\theta_2$	$-s\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$ $s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_2 s\theta_3$ $-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$ $-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
12	2, 1, 2	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$ $s\theta_2 s\theta_3$ $-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$ $c\theta_2$ $c\theta_1 s\theta_2$	$s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$ $-s\theta_2 c\theta_3$ $c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$

(注)  $s\theta_n = \sin \theta_n$ 、 $c\theta_n = \cos \theta_n$  であり、n は何回目の回転角かを示す。

表3.3-2 方向余弦から回転順のオイラー角への変換

回転順のオイラー角 $\mathbf{D}_B^l = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$				
No.	i, j, k	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
1	1, 2, 3	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{11})$
2	2, 3, 1	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{22})$
3	3, 1, 2	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{22})$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{33})$
4	3, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{33})$
5	1, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{22})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{11})$
6	2, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{22})$
7	1, 2, 1	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{13})$
8	2, 3, 2	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{21})$
9	3, 1, 3	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{23})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{32})$
10	3, 2, 3	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{13})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{31})$
11	1, 3, 1	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{21})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{12})$
12	2, 1, 2	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{32})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{23})$

表3.3-3 方向余弦から座標軸順のオイラー角への変換

座標軸順のオイラー角					
No.	i, j, k	表3.3-2の角度	第1軸周り	第2軸周り	第3軸周り
1	1, 2, 3	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{11})$
2	2, 3, 1	$\theta_3, \theta_1, \theta_2$	$\tan^{-1}(-d_{23}/d_{22})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$
3	3, 1, 2	$\theta_2, \theta_3, \theta_1$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}/d_{33})$	$\tan^{-1}(-d_{12}/d_{22})$
4	3, 2, 1	$\theta_3, \theta_2, \theta_1$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{11})$
5	1, 3, 2	$\theta_1, \theta_3, \theta_2$	$\tan^{-1}(d_{32}/d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$
6	2, 1, 3	$\theta_2, \theta_1, \theta_3$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{13}/d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{21}/d_{22})$
No.	i, j, k	表3.3-2の角度	以下は座標軸順ではない		
7	1, 2, 1	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{13})$
8	2, 3, 2	$\theta_3, \theta_1, \theta_2$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{21})$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$
9	3, 1, 3	$\theta_2, \theta_3, \theta_1$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{32})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{23})$
10	3, 2, 3	$\theta_3, \theta_2, \theta_1$	$\tan^{-1}(d_{32}/-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{23}/d_{13})$
11	1, 3, 1	$\theta_1, \theta_3, \theta_2$	$\tan^{-1}(d_{31}/d_{21})$	$\tan^{-1}(d_{13}/-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{11})$
12	2, 1, 2	$\theta_2, \theta_1, \theta_3$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{12}/d_{32})$	$\tan^{-1}(d_{21}/-d_{23})$

(注) No.7～12 は座標軸順ではない。

## (2) オイラー角の微係数

慣性座標系に対する回転座標系の回転角速度を次式で表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \mathbf{x}_B + \omega_{y_B} \mathbf{y}_B + \omega_{z_B} \mathbf{z}_B \quad \cdots \cdots \cdots (3.3-4)$$

このとき、式(3.3-3)の回転軸i, j, kの各軸(図3.3-1に示した例では、それぞれx軸、y'軸、z''軸)周りの回転角速度がオイラー角の微係数であり、これらを順次求める。

第1回目の回転は下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}' & \underline{y}' & \underline{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i$$

この回転による角速度は、回転後の座標系で下記のように回転軸成分を取り出して表される。

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \underline{x}' & \underline{y}' & \underline{z}' \end{pmatrix} \cdot \underline{\delta}_i = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad \dots\dots\dots (3.3-5)$$

$$\text{ここで、} \underline{\delta}_i = \begin{cases} (1 & 0 & 0)^T & : i=1 \text{の時} \\ (0 & 1 & 0)^T & : i=2 \text{の時} \\ (0 & 0 & 1)^T & : i=3 \text{の時} \end{cases}$$

同様に、第2回目の回転は下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}'' & \underline{y}'' & \underline{z}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}' & \underline{y}' & \underline{z}' \end{pmatrix} \cdot [\theta_2]_j = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \underline{x}'' & \underline{y}'' & \underline{z}'' \end{pmatrix} \cdot \underline{\delta}_j = \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad \dots\dots\dots (3.3-6)$$

第3回目の回転も同様にして、下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}'' & \underline{y}'' & \underline{z}'' \end{pmatrix} \cdot [\theta_3]_k = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$$

$$\omega_3 = \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} \underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B \end{pmatrix} \cdot \underline{\delta}_k = \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \quad \dots\dots\dots (3.3-7)$$

上記の角速度の合計が回転座標系の回転角速度となり、下記のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \omega_B &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ &= \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \\ &\quad + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \\ &\quad + \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k \quad \dots\dots\dots (3.3-8) \end{aligned}$$

よって、この式と(3.3-4)式を等値して

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot (\dot{\theta}_1 [\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i + \dot{\theta}_2 [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j + \dot{\theta}_3 [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \\ &= \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \quad \dots\dots\dots (3.3-9) \end{aligned}$$

上式を書き直して整理すると

$$\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot ([\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

ここで式(3.3-1)を一般化した $\begin{pmatrix} \underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k$ を代入して、

$$\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot ([\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$([\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$([\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k)^T \cdot ([\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$([- \theta_3]_k \cdot [- \theta_2]_j \cdot [- \theta_1]_i) \cdot ([\theta_1]_i \cdot \underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_k) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix}$$

$$([- \theta_3]_k \cdot [- \theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_i \quad [- \theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_j \quad \underline{\delta}_k) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.3-10)$$

従って、オイラー角の微係数は上式から、下記のように表される。



$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-\theta_3]_k \cdot [-\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_i & [-\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_j & \underline{\delta}_k \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.3-11)$$

上記の回転座標系の回転角速度からオイラー角微係数への変換マトリクスは、表3.3-4の通りである。

表3.3-4 オイラー角微係数への変換マトリクス

No.	i, j, k	微係数	オイラー角微係数への変換マトリクス		
			$\omega_{x_B}$	$\omega_{y_B}$	$\omega_{z_B}$
1	1, 2, 3	$\dot{\theta}_1$	$c\theta_3 / c\theta_2$	$-s\theta_3 / c\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$s\theta_3$	$c\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$-s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	1
2	2, 3, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$c\theta_3 / c\theta_2$	$-s\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$s\theta_3$	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$-s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$
3	3, 1, 2	$\dot{\theta}_1$	$-s\theta_3 / c\theta_2$	0	$c\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	0	$s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	1	$-s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$
4	3, 2, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$s\theta_3 / c\theta_2$	$c\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$c\theta_3$	$-s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$
5	1, 3, 2	$\dot{\theta}_1$	$c\theta_3 / c\theta_2$	0	$s\theta_3 / c\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$-s\theta_3$	0	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	1	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$
6	2, 1, 3	$\dot{\theta}_1$	$s\theta_3 / c\theta_2$	$c\theta_3 / c\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	$-s\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$s\theta_2 s\theta_3 / c\theta_2$	$s\theta_2 c\theta_3 / c\theta_2$	1
7	1, 2, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$s\theta_3 / s\theta_2$	$c\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$c\theta_3$	$-s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$
8	2, 3, 2	$\dot{\theta}_1$	$c\theta_3 / s\theta_2$	0	$s\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$-s\theta_3$	0	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$-c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	1	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$
9	3, 1, 3	$\dot{\theta}_1$	$s\theta_3 / s\theta_2$	$c\theta_3 / s\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	$-s\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	1
10	3, 2, 3	$\dot{\theta}_1$	$-c\theta_3 / s\theta_2$	$s\theta_3 / s\theta_2$	0
		$\dot{\theta}_2$	$s\theta_3$	$c\theta_3$	0
		$\dot{\theta}_3$	$c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	1
11	1, 3, 1	$\dot{\theta}_1$	0	$-c\theta_3 / s\theta_2$	$s\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	0	$s\theta_3$	$c\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	1	$c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$
12	2, 1, 2	$\dot{\theta}_1$	$s\theta_3 / s\theta_2$	0	$-c\theta_3 / s\theta_2$
		$\dot{\theta}_2$	$c\theta_3$	0	$s\theta_3$
		$\dot{\theta}_3$	$-c\theta_2 s\theta_3 / s\theta_2$	1	$c\theta_2 c\theta_3 / s\theta_2$

(注)  $s\theta_n = \sin \theta_n$ 、 $c\theta_n = \cos \theta_n$  であり、n は何回目の回転角かを示す。

### 3.4 四元数(クォータニオン)

#### (1) 四元数

四元数は、一つの実数と3種類の虚数から成る超複素数で、次のように表される。

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots(3.4-1)$$

ここで $q_0, q_1, q_2, q_3$ は実係数で、オイラーパラメータと呼ばれる。

この3種類の虚数単位は下記の乗算規則に従う。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} * \mathbf{i} &= \mathbf{i}^2 = -1, & \mathbf{i} * \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{i} * \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} * \mathbf{j} &= \mathbf{j}^2 = -1, & \mathbf{j} * \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{j} * \mathbf{i} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} * \mathbf{k} &= \mathbf{k}^2 = -1, & \mathbf{k} * \mathbf{i} &= \mathbf{j}, & \mathbf{k} * \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.4-2)$$

このような演算規則に従う虚数単位は下記のマトリクスで表すことができる。このマトリクスを用いたのがケーリー数で、複素数演算を伴うので姿勢表現には適さないが、参考に示す。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.4-3)$$

ここで、 $i$  : 通常の虚数単位 $\sqrt{-1}$

四元数の虚数単位は式(3.4-2)に示したように、3つが互いに直交した基底ベクトルの性質を持っているので、2.2項の式(2.2-8)に示したオイラー軸ベクトルを下記のように表し、

$$\underline{\mathbf{e}} = e_i\mathbf{i} + e_j\mathbf{j} + e_k\mathbf{k}$$

これを四元数の虚数部に対応させて、オイラー軸周りの回転角  $\theta$  を用いて式(3.4-1)を次のように表せば、四元数で座標系の回転を表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \underline{\mathbf{e}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} e_i \mathbf{i} + \sin \frac{\theta}{2} e_j \mathbf{j} + \sin \frac{\theta}{2} e_k \mathbf{k} \\ &= q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad \dots\dots\dots(3.4-4) \end{aligned}$$

ここで、 $q_0 = \cos \frac{\theta}{2}$ 、 $q_1 = \sin \frac{\theta}{2} e_i$ 、 $q_2 = \sin \frac{\theta}{2} e_j$ 、 $q_3 = \sin \frac{\theta}{2} e_k$

#### (2) 四元数の演算

四元数同志の乗算は下記で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \underline{\mathbf{e}}_1 = c_1 + s_1 \underline{\mathbf{e}}_1, & \underline{\mathbf{e}}_1 &= e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k} \\ \mathbf{Q}_2 &= \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} \underline{\mathbf{e}}_2 = c_2 + s_2 \underline{\mathbf{e}}_2, & \underline{\mathbf{e}}_2 &= e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k} \quad \text{としたとき} \\ \mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 &= (c_1 + s_1 \underline{\mathbf{e}}_1) * (c_2 + s_2 \underline{\mathbf{e}}_2) \\ &= \{c_1 + s_1(e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k})\} * \{c_2 + s_2(e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k})\} \\ &= c_1 c_2 + s_1 c_2 (e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k}) + c_1 s_2 (e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k}) \\ &\quad + s_1 s_2 (e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k}) * (e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k}) \\ &= c_1 c_2 + s_1 c_2 (e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k}) + c_1 s_2 (e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k}) \\ &\quad + s_1 s_2 \{e_{1i} (e_{2i} \mathbf{i} * \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{i} * \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{i} * \mathbf{k}) + e_{1j} (e_{2i} \mathbf{j} * \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} * \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{j} * \mathbf{k}) \\ &\quad + e_{1k} (e_{2i} \mathbf{k} * \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{k} * \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k} * \mathbf{k})\} \\ &= c_1 c_2 + s_1 c_2 (e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k}) + c_1 s_2 (e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k}) \\ &\quad + s_1 s_2 \{e_{1i} (-e_{2i} + e_{2j} \mathbf{k} - e_{2k} \mathbf{j}) + e_{1j} (-e_{2i} \mathbf{k} - e_{2j} + e_{2k} \mathbf{i}) + e_{1k} (e_{2i} \mathbf{j} - e_{2j} \mathbf{i} - e_{2k})\} \end{aligned}$$

$$= c_1 c_2 + s_1 c_2 (e_{1i} \mathbf{i} + e_{1j} \mathbf{j} + e_{1k} \mathbf{k}) + c_1 s_2 (e_{2i} \mathbf{i} + e_{2j} \mathbf{j} + e_{2k} \mathbf{k}) - s_1 s_2 (e_{1i} e_{2i} + e_{1j} e_{2j} + e_{1k} e_{2k}) \\ + s_1 s_2 \{ (e_{1j} e_{2k} - e_{1k} e_{2j}) \mathbf{i} + (e_{1k} e_{2i} - e_{1i} e_{2k}) \mathbf{j} + (e_{1i} e_{2j} - e_{1j} e_{2i}) \mathbf{k} \}$$

この式はオイラー軸ベクトルのベクトル演算で内積(演算記号 $\cdot$ )と外積(演算記号 $\times$ )を用いて、下記のように書き換えることができる。

$$\mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 = c_1 c_2 + s_1 c_2 \underline{e}_1 + c_1 s_2 \underline{e}_2 - s_1 s_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2) + s_1 s_2 (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2)$$

よって、虚数部をベクトルで表現した四元数の乗算は、新しい演算記号 $\otimes$ を用いて、下記のように表現される。

$$\mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2 = (c_1 + s_1 \underline{e}_1) \otimes (c_2 + s_2 \underline{e}_2) \\ = c_1 c_2 + s_1 c_2 \underline{e}_1 + c_1 s_2 \underline{e}_2 + s_1 s_2 (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 - \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2) \\ = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \underline{e}_1 \\ s_1 \underline{e}_1 & c_1 \mathbf{1} + s_1 [\underline{e}_1 \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ s_2 \underline{e}_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.4-5)$$

このように、四元数はスカラー部とベクトル部で構成されるものとして、ベクトル演算で扱うことができる。

### (3) 共役四元数

四元数のベクトル部の符号を反転させることは、オイラー軸の符号が反転して回転の方向を反対にするこ  
ととなる。これを共役四元数と呼び、下記のように表される。

$$\mathbf{Q}^* = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \underline{e} = c - s \underline{e} \dots\dots\dots (3.4-6)$$

四元数とその共役四元数の関係は、方向余弦マトリクスとその転置マトリクス(および逆マトリクス)の関係に対  
応し、四元数とその共役四元数の乗算は、下記のように表される。

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}^* = (c + s \underline{e}) \otimes (c - s \underline{e}) = \begin{pmatrix} c & -s \underline{e} \\ s \underline{e} & c \mathbf{1} + s [\underline{e} \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -s \underline{e} \end{pmatrix} \\ = c^2 + c s \underline{e} + s^2 (\underline{e} \cdot \underline{e}) - c s \underline{e} - s^2 (\underline{e} \times \underline{e}) = \mathbf{1} \dots\dots\dots (3.4-7)$$

よって、共役四元数は逆四元数ということもできる。

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^{-1} \dots\dots\dots (3.4-8)$$

### (4) 四元数によるベクトルの回転

ベクトルはスカラー部がゼロの四元数として扱い、下記のように乗算できる。

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{a} = (c + s \underline{e}) \otimes (0 + \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} c & -s \underline{e} \\ s \underline{e} & c \mathbf{1} + s [\underline{e} \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = -s (\underline{e} \cdot \mathbf{a}) + c \mathbf{a} + s (\underline{e} \times \mathbf{a}) \dots\dots\dots (3.4-9)$$

四元数を用いたベクトルの回転は、下記のように表現される。

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}^* \dots\dots\dots (3.4-10) \\ = \begin{pmatrix} c & -s \underline{e} \\ s \underline{e} & c \mathbf{1} + s [\underline{e} \times] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{Q}^* = \{ -s (\underline{e} \cdot \mathbf{a}) + c \mathbf{a} + s (\underline{e} \times \mathbf{a}) \} \otimes \mathbf{Q}^* \\ = \begin{pmatrix} -s (\underline{e} \cdot \mathbf{a}) & -c \mathbf{a} - s (\underline{e} \times \mathbf{a}) \\ c \mathbf{a} + s (\underline{e} \times \mathbf{a}) & -s (\underline{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{1} + \{ c [\mathbf{a} \times] + s [(\underline{e} \times \mathbf{a}) \times] \} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ -s \underline{e} \end{pmatrix} \\ = \{ -s c (\underline{e} \cdot \mathbf{a}) + s c (\mathbf{a} \cdot \underline{e}) + s^2 (\underline{e} \times \mathbf{a}) \cdot \underline{e} \} + c^2 \mathbf{a} + s c (\underline{e} \times \mathbf{a}) + s^2 (\underline{e} \cdot \mathbf{a}) \underline{e} - s c (\mathbf{a} \times \underline{e}) - s^2 (\underline{e} \times \mathbf{a}) \times \underline{e}$$

ここで、

ベクトル3重積  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$  より  $(\underline{e} \cdot \mathbf{a}) \underline{e} = (\underline{e} \cdot \underline{e}) \mathbf{a} - \underline{e} \times (\mathbf{a} \times \underline{e}) = \mathbf{a} + \underline{e} \times (\underline{e} \times \mathbf{a})$ 、  
スカラー3重積  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$  より  $(\underline{e} \times \mathbf{a}) \cdot \underline{e} = (\underline{e} \times \underline{e}) \cdot \mathbf{a} = 0$  であるから、これらを代入して整  
理すると、

$$\mathbf{a}' = c^2 \mathbf{a} + 2 s c (\underline{e} \times \mathbf{a}) + s^2 \{ \mathbf{a} + \underline{e} \times (\underline{e} \times \mathbf{a}) \} + s^2 \underline{e} \times (\underline{e} \times \mathbf{a}) \\ = \mathbf{a} + 2 s c (\underline{e} \times \mathbf{a}) + 2 s^2 \{ \underline{e} \times (\underline{e} \times \mathbf{a}) \} \\ = \{ 1 + 2 s c [\underline{e} \times] + 2 s^2 [\underline{e} \times]^2 \} \cdot \mathbf{a}$$

$$= \left\{ 1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \mathbf{a} \cdots \cdots (3.4-11)$$

この式に  $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sin \theta$  および  $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$  を代入すると、

式(3.4-11)はロドリゲスの回転公式(2.1-3)と同じことが分かる。

$$\mathbf{a}' = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \mathbf{a}$$

四元数によるベクトルの回転の式は式(1.2-3)に示したように、ある回転軸の周りにある角度だけ単一の回転マトリクスで回転する式に相当し、次のように表される。

$$\mathbf{a}' = \left\{ \mathbf{1} + \sin \theta [\underline{e} \times] + (1 - \cos \theta) [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Q}(\theta, \underline{e}) \cdot \mathbf{a} \cdots \cdots (3.4-12)$$

上記の式(3.4-11)を  $\sin \frac{\theta}{2} = s$ 、 $\cos \frac{\theta}{2} = c$  および  $q_0 = c$ 、 $q_1 = se_i$ 、 $q_2 = se_j$ 、 $q_3 = se_k$  を用いてマトリクス形式に表現して書き直すと、

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} 1 + 2s^2(-e_j^2 - e_k^2) & 2s^2e_je_i - 2sce_k & 2s^2e_ke_i + 2scej \\ 2s^2e_ie_j + 2scek & 1 + 2s^2(-e_k^2 - e_i^2) & 2s^2e_ke_j - 2sce_i \\ 2s^2e_ie_k - 2scej & 2s^2e_je_k + 2sce_i & 1 + 2s^2(-e_i^2 - e_j^2) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}$$

ここで  $1 + 2s^2(-e_j^2 - e_k^2) = 1 + s^2(-e_j^2 - e_k^2) + s^2(-e_j^2 - e_k^2)$

$$= 1 + s^2(e_i^2 - 1) + s^2(-e_j^2 - e_k^2) = 1 - s^2 + s^2e_i^2 + s^2(-e_j^2 - e_k^2)$$

$$= c^2 + s^2(e_i^2 - e_j^2 - e_k^2)$$

であり、他の2つの対角要素も同様に表せるから

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \begin{pmatrix} c^2 + s^2(e_i^2 - e_j^2 - e_k^2) & 2s^2e_je_i - 2scek & 2s^2e_ke_i + 2scej \\ 2s^2e_ie_j + 2scek & c^2 + s^2(e_j^2 - e_k^2 - e_i^2) & 2s^2e_ke_j - 2sce_i \\ 2s^2e_ie_k - 2scej & 2s^2e_je_k + 2sce_i & c^2 + s^2(e_k^2 - e_i^2 - e_j^2) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \\ &= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_1 - q_0q_3) & 2(q_3q_1 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_3q_2 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \cdots \cdots (3.4-13) \end{aligned}$$

#### (5) 方向余弦マトリクスから四元数への変換

回転体の姿勢は方向余弦マトリクスで表すのが簡単で、オイラー角による座標系の回転の式(1.2-20)に示したように、基準とする座標系を順次回転して回転体の姿勢を表す回転座標系の方向余弦マトリクスを求め、四元数との対比から下記のように四元数を求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_1 - q_0q_3) & 2(q_3q_1 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_3q_2 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \\ \left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{\sqrt{d_{11} + d_{22} + d_{33} + 1}}{2} \\ q_1 &= \frac{d_{32} - d_{23}}{4q_0} \\ q_2 &= \frac{d_{13} - d_{31}}{4q_0} \\ q_3 &= \frac{d_{21} - d_{12}}{4q_0} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3.4-14) \end{aligned}$$

#### (6) 四元数の合成

式(3.4-12)に示したように、四元数は1.2(2)項の単一の回転マトリクスに対応するが、複数の回転マトリクスをオイラー角順あるいは固定角順に合成した回転マトリクスに対応した四元数が考えられ、下記の3種類の体(非可換体)が考えられる。

(1)  $\mathbf{Q}_Z^A = \mathbf{Q}_B^A(\theta_1, \underline{e}_1) \otimes \mathbf{Q}_C^B(\theta_2, \underline{e}_2) \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_Z^Y(\theta_n, \underline{e}_n)$  : オイラー角型四元数

上記は座標系の回転およびベクトルの座標変換に利用できる。

(2)  $(\mathbf{Q}_Z^A)^I = \mathbf{Q}_Z^I \otimes \mathbf{Q}_A^{I*}$  : 固定角型四元数

上記は座標系の回転およびベクトルの回転に利用できる。

(3)  $(\mathbf{Q}_Z^A) = \mathbf{Q}_Z^Y(\theta_n, \underline{e}_n) \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_C^B(\theta_2, \underline{e}_2) \otimes \mathbf{Q}_B^A(\theta_1, \underline{e}_1)$  : 固定角順四元数

上記はベクトルの座標変換および回転に利用できる。

#### (7) 四元数の微係数

慣性座標系に対する回転座標系Bの回転角速度及びオイラー軸ベクトルを次のように表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B} \underline{x}_B + \omega_{y_B} \underline{y}_B + \omega_{z_B} \underline{z}_B \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-15)$$

$$\underline{e} = e_{x_B} \underline{x}_B + e_{y_B} \underline{y}_B + e_{z_B} \underline{z}_B \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-16)$$

また、オイラー軸ベクトル及びその周りの回転角の微係数は式(2.2-18)及び式(2.2-19)を書き直して、それぞれ下記のように表す。

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \frac{1}{2} \left\{ [\underline{e} \times] - \cot \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times] - \cos \frac{\theta}{2} [\underline{e} \times]^2 \right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) & -\cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{x_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} & -\cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{x_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{y_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} & \cos \frac{\theta}{2} (e_{z_B}^2 + e_{x_B}^2) & -\cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{y_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{z_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} & -\cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{z_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} & \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \quad \cdots (3.4-17) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{\omega}_B \cdot \underline{e} = \omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B} \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-18)$$

このとき、下記の四元数の実係数を微分して

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad q_1 = \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B}, \quad q_2 = \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B}, \quad q_3 = \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\ &= -\frac{1}{2} (\omega_{x_B} q_1 + \omega_{y_B} q_2 + \omega_{z_B} q_3) \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} + \sin \frac{\theta}{2} \dot{e}_{x_B} \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{x_B} - \left( \cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{x_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{y_B} - \left( \cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{x_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{x_B} - \left( \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{y_B} + \left( \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ q_0 \omega_{x_B} - q_3 \omega_{y_B} + q_2 \omega_{z_B} \} \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} + \sin \frac{\theta}{2} \dot{e}_{y_B} \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\left( \cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{y_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{x_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{z_B}^2 + e_{x_B}^2) \omega_{y_B} - \left( \cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} e_{y_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \sin \frac{\theta}{2} e_{z_B} \right) \omega_{x_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{y_B} - \left( \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{z_B} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ q_3 \omega_{x_B} + q_0 \omega_{y_B} - q_1 \omega_{z_B} \} \quad \cdots \cdots \cdots (3.4-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_3 &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} + \sin \frac{\theta}{2} \dot{e}_{z_B} \\
&= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_{z_B} (\omega_{x_B} e_{x_B} + \omega_{y_B} e_{y_B} + \omega_{z_B} e_{z_B}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ - \left( \cos \frac{\theta}{2} e_{x_B} e_{z_B} + \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{x_B} - \left( \cos \frac{\theta}{2} e_{y_B} e_{z_B} - \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{y_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2) \omega_{z_B} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ - \left( \sin \frac{\theta}{2} e_{y_B} \right) \omega_{x_B} + \left( \sin \frac{\theta}{2} e_{x_B} \right) \omega_{y_B} + \cos \frac{\theta}{2} (e_{x_B}^2 + e_{y_B}^2 + e_{z_B}^2) \omega_{z_B} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{ -q_2 \omega_{x_B} + q_1 \omega_{y_B} + q_0 \omega_{z_B} \} \dots\dots\dots (3.4-22)
\end{aligned}$$

上記をまとめると、四元数の微係数は下記で表される。

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{x_B} & -\omega_{y_B} & -\omega_{z_B} \\ \omega_{x_B} & 0 & \omega_{z_B} & -\omega_{y_B} \\ \omega_{y_B} & -\omega_{z_B} & 0 & \omega_{x_B} \\ \omega_{z_B} & \omega_{y_B} & -\omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \dots\dots (3.4-23)$$

(8) 角度増分に基づく四元数の更新

四元数のn次微分は式(3.4-23)より、次のように表される。

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes] \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\mathbf{Q}) = \dots\dots = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes]^{n-1} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes]^n \cdot \mathbf{Q} \dots\dots\dots (3.4-24)$$

$$\text{ここで、} [\boldsymbol{\omega}_B \otimes] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{x_B} & -\omega_{y_B} & -\omega_{z_B} \\ \omega_{x_B} & 0 & \omega_{z_B} & -\omega_{y_B} \\ \omega_{y_B} & -\omega_{z_B} & 0 & \omega_{x_B} \\ \omega_{z_B} & \omega_{y_B} & -\omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix}$$

よって、微小期間を $\Delta T$ 、現時点を $k$ 、現時点より $\Delta T$ 前の時点を $k-1$ としたとき、四元数は方向余弦マトリクスの場合と同様に、式(3.2-5)に式(3.4-24)を代入して、次のようにテーラー級数で表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_k &= \mathbf{Q}_{k-1} + \Delta T \dot{\mathbf{Q}}_{k-1} + \frac{\Delta T^2}{2!} \ddot{\mathbf{Q}}_{k-1} + \dots\dots + \frac{\Delta T^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{Q}_{k-1}) + \dots\dots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1} + \frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes] \cdot \mathbf{Q}_{k-1} + \frac{\Delta T^2}{2^2 2!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^2 \cdot \mathbf{Q}_{k-1} + \dots\dots + \frac{\Delta T^n}{2^n n!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^n \cdot \mathbf{Q}_{k-1} + \dots\dots \\
&= \left( 1 + \frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes] + \frac{\Delta T^2}{2^2 2!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^2 + \dots\dots + \frac{\Delta T^n}{2^n n!} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]^n + \dots\dots \right) \cdot \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= e^{\frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]} \cdot \mathbf{Q}_{k-1} \dots\dots\dots (3.4-25)
\end{aligned}$$

ここでマトリクス指数関数 $e^{\frac{\Delta T}{2} [\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \otimes]}$ は推移マトリクスと呼ばれ、 $k-1$ 時点から $k$ 時点までの $\Delta T$ 間の推移を表している。

慣性座標系 $I(o-x, y, z)$ を基準座標系として、回転座標系 $B(o-x_B, y_B, z_B)$ としたとき、基準座標系から $k-1$ 時点の回転座標系への回転を示す四元数を $\mathbf{Q}_{B,k-1}^I$ 、 $k-1$ 時点の回転座標系から $k$ 時点の回転座標系への回転を示す四元数を $\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}$ とすると、基準座標系の座標軸単位ベクトル $(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})$ を $k$ 時点の回転座標系の座標軸単位ベクトル $(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B)$ へ回転させる四元数 $\mathbf{Q}_{B,k}^I$ は、式(3.4-10)より次のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}' &= \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k-1}^I)^* \\
\mathbf{a}'' &= \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \mathbf{a}' \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^* = \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \{ \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k-1}^I)^* \} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^* \\
&= \{ \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \} \otimes \mathbf{a} \otimes \{ (\mathbf{Q}_{B,k-1}^I)^* \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^* \} = \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \text{より}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{B,k}^I = \mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1} \otimes \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \dots\dots\dots (3.4-26)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_B &= \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \underline{x} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \\ \underline{y}_B &= \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \underline{y} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \\ \underline{z}_B &= \mathbf{Q}_{B,k}^I \otimes \underline{z} \otimes (\mathbf{Q}_{B,k}^I)^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4-27)$$

ここで上記の四元数は何れも基準座標系から見たオイラー軸で定義されているが、 $\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}$ は $k-1$ 時点から $k$ 時点までの角度増分を用いて回転座標系で表すのが便利であ

り、それは下記のように表される。

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^{B,k-1} &= \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \sin \frac{\Delta\theta}{2} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta} \\ &= \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \Delta\theta \dots\dots\dots (3.4-28) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\theta \equiv \begin{pmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{pmatrix}$ : 回転座標系での角度増分

$$\Delta\theta = |\Delta\theta| = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$$

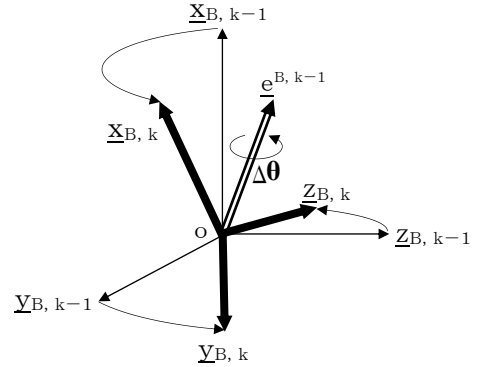


図3.4-1 回転座標系におけるオイラー軸

従って、これを式(3.4-26)および積の式(3.4-5)を用いて表せば、下記のように記述される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{B,k}^I &= (\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1})^{B,k-1} \otimes \mathbf{Q}_{B,k-1}^I \\ &= \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} c_n & -\Delta\theta_x s_n & -\Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_z s_n \\ \Delta\theta_x s_n & c_n & \Delta\theta_z s_n & -\Delta\theta_y s_n \\ \Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_z s_n & c_n & \Delta\theta_x s_n \\ \Delta\theta_z s_n & \Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_x s_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_{k-1} \dots\dots\dots (3.4-29) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{Q}_{B,k}^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_k$

$$\mathbf{Q}_{B,k-1}^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \\ q_0 \\ q_0 \end{pmatrix}_{k-1}$$

$$s_n = \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \dots\dots\dots (3.4-30)$$

$$c_n = \cos \frac{\Delta\theta}{2} \dots\dots\dots (3.4-31)$$

#### (9) ギブス・ベクター

四元数の式(3.4-4)において、全体を実数部で割ってベクトル部のみで表した数はギブス・ベクターと呼ばれ、下記のように表される。

$$\mathbf{Q} = \tan \frac{\theta}{2} \underline{e} = \frac{q_1}{q_0} \mathbf{i} + \frac{q_2}{q_0} \mathbf{j} + \frac{q_3}{q_0} \mathbf{k} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} \dots\dots\dots (3.4-32)$$

このギブス・ベクターを用いた姿勢計算は、科学衛星打上げ用のMロケットで採用されている。また、H-IIロケットの固体ロケットブースタ(SRB)を1段とし、2段及び3段にM-3SIIロケットのそれらを組合わせた格好で開発されたJ-Iロケットにも、そのまま採用された。上式を見れば分かるように、このパラメータは角度 $\theta = 180^\circ$ に特異点を有しているが、これらロケットは発射してから衛星分離までにそんなに回転することはないので、問題は無い。

## (10) ケーリー数

式(3.4-1)の四元数に式(3.4-3)の虚数単位を代入した数はケーリー数と呼ばれ、下記のように通常の複素数を要素とした2行2列のマトリクスで表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 + q_1 i & q_2 + q_3 i \\ -q_2 + q_3 i & q_0 - q_1 i \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.4-33) \end{aligned}$$

このケーリー数を用いて四元数と同様にベクトルの回転を表すことができるが、複素数演算を行わねばならないので、普通は用いられない。