

座標系の回転および、ベクトルの回転と座標変換の例題

目 次

1 座標系	1
2 座標系の軸ベクトル	6
3 ベクトル	7
4 回転マトリクスの縮退	7
5 例題の結果	7
6 まとめ	16
6.1 座標系の回転	16
6.2 ベクトルの回転	17
6.3 ベクトルの座標変換	17

下記の6種類の体(非可換体)について演算結果を比較検討する。

$$\mathbf{D}_R^I = (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I) = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdot [\theta_3]_k : \text{方向余弦マトリクス}$$

$$(\mathbf{D}_G^R)^I = \mathbf{D}_G^I \cdot \mathbf{D}_R^{I^T} = (\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I) \cdot (\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I)^T : \text{固定角型回転マトリクス}$$

$$\mathbf{Q}_R^I = \mathbf{Q}(\theta_1, \underline{e}_i) \otimes \mathbf{Q}(\theta_2, \underline{e}_j) \otimes \mathbf{Q}(\theta_3, \underline{e}_k) : \text{オイラー角型四元数}$$

$$(\mathbf{Q}_G^R)^I = \mathbf{Q}_G^I \otimes \mathbf{Q}_R^{I*} : \text{固定角型四元数}$$

$$(\mathbf{D}_R^I) = [\varphi_3]_k \cdot [\varphi_2]_j \cdot [\varphi_1]_i : \text{固定角順回転マトリクス}$$

$$(\mathbf{Q}_R^I) = \mathbf{Q}(\varphi_3, \underline{e}_k) \otimes \mathbf{Q}(\varphi_2, \underline{e}_j) \otimes \mathbf{Q}(\varphi_1, \underline{e}_i) : \text{固定角順四元数}$$

1 座標系

基準とする慣性座標系I(o-x, y, z)の軸単位ベクトルを $(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z})$ とし、慣性座標系Iを回転してできた局地座標系L(o-xL, yL, zL)の軸単位ベクトルを慣性座標系Iで表して $(\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I)$ とする。さらに、局地座標系Lを基準として2つの座標系を作り、それぞれ座標系B(o-xB, yB, zB)および座標系A(o-xA, yA, zA)とし、それぞれの軸単位ベクトルを座標系Lで表して $(\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L)$ および $(\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L)$ とする。また、これらは慣性座標系Iでは $(\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I)$ および $(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I)$ と表す。

慣性座標系Iは地球中心に原点を置き、グリニッジ子午線と赤道面の交点方向に x 軸、自転軸方向に z 軸、それらと右手系を成す方向に y 軸を定義する。

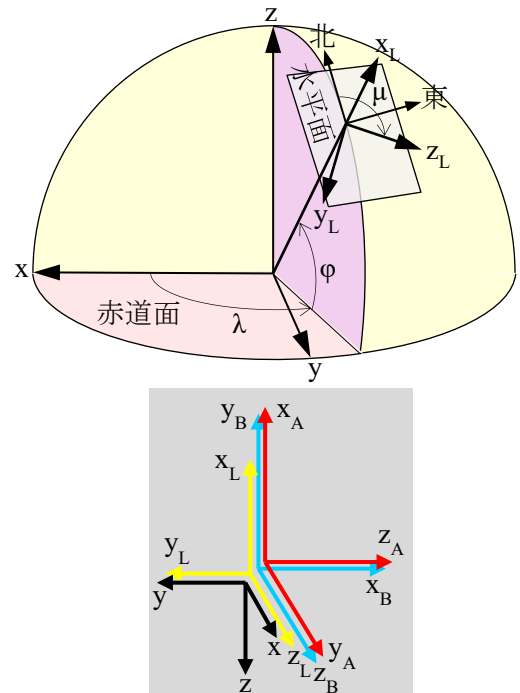


図1-1 例題の座標系

局地座標系Lは慣性座標系Iの第3軸周りに東経 λ だけ回転し、新しくできた第2軸周りに緯度 ϕ の負符号の回転、さらに新しくできた第1軸周りに北から時計回りに測った方位角 μ の回転を施した座標系とする。これにより $\underline{x}_L$ 軸は局所鉛直方向、 $\underline{y}_L$ 軸と $\underline{z}_L$ 軸は局所水平面にあり、 $\underline{z}_L$ 軸が方位角方向を向く。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_L^I & \underline{y}_L^I & \underline{z}_L^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot [\lambda]_3 \cdot [-\phi]_2 \cdot [-\mu]_1 = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_L^I : \text{座標系L}$$

ここで、 $\lambda = 90^\circ$, $\phi = -90^\circ$, $\mu = -90^\circ$ とする。また、 $\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}$ は単位マトリクスである。

$$\mathbf{D}_L^I = [90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_2 \cdot [90^\circ]_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの方向余弦マトリクス}$$

$$\underline{x}_L^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{y}_L^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_L^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの軸ベクトル}$$

座標系Iから座標系Lへの回転を表す四元数はオイラー角による回転順に合成して、次のように表される。

$$\mathbf{Q}_{L1} = \cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2} \underline{e}_1 = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{L2} = \cos \frac{-\phi}{2} + \sin \frac{-\phi}{2} \underline{e}_1 = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{L3} = \cos \frac{-\mu}{2} + \sin \frac{-\mu}{2} \underline{e}_1 = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_L^I &= \mathbf{Q}_{L1} \otimes \mathbf{Q}_{L2} \otimes \mathbf{Q}_{L3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから座標系Lへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

座標系Bは座標系Lの第2軸周りに θ_1 回転し、新しくできた第3軸周りに θ_2 回転し、さらに新しくできた第1軸周りに θ_3 回転した座標系とする。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_B^L & \underline{y}_B^L & \underline{z}_B^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_L^I & \underline{y}_L^I & \underline{z}_L^I \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_2 \cdot [\theta_2]_3 \cdot [\theta_3]_1 = \begin{pmatrix} \underline{x}_L^I & \underline{y}_L^I & \underline{z}_L^I \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_B^L : \text{座標系B}$$

ここで、 $\theta_1 = -90^\circ$, $\theta_2 = -90^\circ$, $\theta_3 = -90^\circ$ とする。また、 $\begin{pmatrix} \underline{x}_L^I & \underline{y}_L^I & \underline{z}_L^I \end{pmatrix}$ は単位マトリクスである。

$$\mathbf{D}_B^L = [-90^\circ]_2 \cdot [-90^\circ]_3 \cdot [-90^\circ]_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bの方向余弦マトリクス}$$

$$\mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクス}$$

$$\underline{x}_B^L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y}_B^L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_B^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bの軸ベクトル}$$

$$\underline{x}_B^I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y}_B^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{z}_B^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Bの軸ベクトル}$$

座標系Lから座標系Bへの回転を表す四元数はオイラー角による回転順に合成して、次のように表される。

$$\mathbf{Q}_{B1} = \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_1 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{B2} = \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_2 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{B3} = \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_3}{2} \underline{e}_3 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B^L &= \mathbf{Q}_{B1} \otimes \mathbf{Q}_{B2} \otimes \mathbf{Q}_{B3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Lから座標系Bへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_B^I &= \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{Q}_B^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから座標系Bへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

座標系Aは座標系Lの第3軸周りに φ_1 回転し、新しくできた第1軸周りに φ_2 回転し、さらに新しくできた第3軸周りに φ_3 回転した座標系とする。

$$(\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) \cdot [\varphi_1]_3 \cdot [\varphi_2]_1 \cdot [\varphi_3]_3 = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) \cdot \mathbf{D}_A^L : \text{座標系A}$$

ここで、 $\varphi_1 = 180^\circ$, $\varphi_2 = -90^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$ とする。また、 $(\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L)$ は単位マトリクスである。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^L &= [180^\circ]_3 \cdot [-90^\circ]_1 \cdot [180^\circ]_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Aの方向余弦マトリクス} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^I &= \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Aの方向余弦マトリクス} \end{aligned}$$

$$\underline{x}_A^L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y}_A^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{z}_A^L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Aの軸ベクトル}$$

$$\underline{x}_A^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{y}_A^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{z}_A^I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Aの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{Q}_{A1} = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \underline{e}_1 = \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{A2} = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2} \underline{e}_2 = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{Q}_{A3} = \cos \frac{\varphi_3}{2} + \sin \frac{\varphi_3}{2} \underline{e}_3 = \cos(90^\circ) + \sin(90^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_A^L &= \mathbf{Q}_{A1} \otimes \mathbf{Q}_{A2} \otimes \mathbf{Q}_{A3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left\{ 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 0 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Lから座標Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_A^I &= \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{Q}_A^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから座標Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

次に座標系Bと座標系Aの関係を示す。

$$(\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) = (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) \cdot \mathbf{D}_A^B : \text{オイラー角による座標系の回転}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_A^B &= \mathbf{D}_B^{L^T} \cdot \mathbf{D}_A^L \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Bから見た座標系Aの方向余弦マトリクス} \\ \mathbf{Q}_A^B &= \mathbf{Q}_B^{L^*} \otimes \mathbf{Q}_A^L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Bから座標系Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

この四元数を方向余弦マトリクスに変換してみると下記のようになる。

$$\mathbf{D}_A^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

固定角型回転マトリクスは基準座標系が等しい2つの方向余弦マトリクスを合成したものだから、その基準座標系が固定角型回転マトリクスの基準座標系となり、カッコの外に右上添え字として基準座標系を表示して次のように定義する。

$$(\mathbf{D}_L^I)^I = (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I) \cdot (\underline{x}_I^I \quad \underline{y}_I^I \quad \underline{z}_I^I)^T = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^I = \mathbf{D}_L^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_B^L)^I = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) \cdot (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I)^T = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_A^L)^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \cdot (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_B^I)^I = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) \cdot (\underline{x}_I^I \quad \underline{y}_I^I \quad \underline{z}_I^I)^T = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT} = \mathbf{D}_B^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_A^I)^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \cdot (\underline{x}_I^I \quad \underline{y}_I^I \quad \underline{z}_I^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_I^{IT} = \mathbf{D}_A^I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_A^B)^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) \cdot (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{Q}_L^I)^I = \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{Q}_I^{I*} = \mathbf{Q}_L^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_B^I)^I &= \mathbf{Q}_B^I \otimes \mathbf{Q}_L^{I*} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_A^I)^I &= \mathbf{Q}_A^I \otimes \mathbf{Q}_L^{I*} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{Q}_B^I)^I = \mathbf{Q}_B^I \otimes \mathbf{Q}_I^{I*} = \mathbf{Q}_B^I = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(\mathbf{Q}_A^I)^I = \mathbf{Q}_A^I \otimes \mathbf{Q}_I^{I*} = \mathbf{Q}_A^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_A^B)^I &= \mathbf{Q}_A^I \otimes \mathbf{Q}_B^{I*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)^* = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{2} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \right\} = \frac{1}{4} \left\{ -2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Iから見た座標系Bから座標系Aへの回転を表す四元数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_A^B)^L &= (\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) \cdot (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L)^T = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^{LT} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Bから座標系Aへの回転マトリクス} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Q}_A^B)^L &= \mathbf{Q}_A^L \otimes \mathbf{Q}_B^{L*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{座標系Lから見た座標系Bから座標系Aへの回転を表す四元数}
\end{aligned}$$

この四元数を回転マトリクスに変換してみると下記のようになる。

$$(\mathbf{D}_A^B)^L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固定角の定義順に合成した回転マトリクスや四元数についても、その働きを調べる。固定角の場合、望みに通りに回転させる回転軸と角度を与えるのが非常に困難なので、座標系間の方向余弦マトリクスと同じ回転マトリクスとなるよう、オイラー角を固定角に変換して用いることとする。

$$\mathbf{D}_L^I = [90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_2 \cdot [90^\circ]_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Iから見た座標系Lの方向余弦マトリクス}$$

このオイラー角順の方向余弦マトリクスと同じ固定角順回転マトリクスになるよう固定角を求めると次のようになる。

$$(\mathbf{D}_L^I) = [0^\circ]_1 \cdot [90^\circ]_2 \cdot [0^\circ]_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同様に、

$$(\mathbf{D}_B^L) = [0^\circ]_1 \cdot [-90^\circ]_3 \cdot [0^\circ]_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}_A^L) = [0^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_1 \cdot [0^\circ]_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{Q}_L^I) = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(\mathbf{Q}_B^L) = \cos(-45^\circ) + \sin(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(\mathbf{Q}_A^L) = \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2 座標系の軸ベクトル

座標系の軸ベクトルは方向余弦マトリクスの列要素で表される。

$$\mathbf{D}_L^I = (\mathbf{x}_L^I \quad \mathbf{y}_L^I \quad \mathbf{z}_L^I) : \text{座標系Iから見た座標系Lの方向余弦マトリクス}$$

ここでは方向余弦マトリクスと区別して軸ベクトルを次のように表すこととする。

$$\mathbf{x}_I^I \equiv \mathbf{D}_I^I = (\mathbf{x}_I^I \quad \mathbf{y}_I^I \quad \mathbf{z}_I^I) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Iから見た座標系Iの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_L^L \equiv \mathbf{D}_L^L = (\mathbf{x}_L^L \quad \mathbf{y}_L^L \quad \mathbf{z}_L^L) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Lから見た座標系Lの軸ベクトル}$$

$$\mathbf{x}_L^I \equiv \mathbf{D}_L^I = (\mathbf{x}_L^I \quad \mathbf{y}_L^I \quad \mathbf{z}_L^I) : \text{座標系Iから見た座標系Lの軸ベクトル}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_B^I &\equiv \mathbf{D}_B^I = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) : \text{座標系Iから見た座標系Bの軸ベクトル} \\ \mathbf{x}_B^L &\equiv \mathbf{D}_B^L = (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) : \text{座標系Lから見た座標系Bの軸ベクトル} \\ \mathbf{x}_A^I &\equiv \mathbf{D}_A^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) : \text{座標系Iから見た座標系Aの軸ベクトル} \\ \mathbf{x}_A^L &\equiv \mathbf{D}_A^L = (\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) : \text{座標系Lから見た座標系Aの軸ベクトル}\end{aligned}$$

3 ベクトル

ここでは回転や座標変換の結果を分かり易くするため各座標軸方向のベクトルのみを用い、演算例を増やしても記述がコンパクトになるよう、演算対象のベクトルを3つまとめて次のように表す。

$$\mathbf{a}_I^I \equiv \mathbf{x}_I^I = (\underline{x}_I^I \quad \underline{y}_I^I \quad \underline{z}_I^I) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Iから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_L^L \equiv \mathbf{x}_L^L = (\underline{x}_L^L \quad \underline{y}_L^L \quad \underline{z}_L^L) = [\mathbf{1}] : \text{座標系Lから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_L^I \equiv \mathbf{x}_L^I = (\underline{x}_L^I \quad \underline{y}_L^I \quad \underline{z}_L^I) : \text{座標系Iから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_B^I \equiv \mathbf{x}_B^I = (\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I) : \text{座標系Iから見た座標系Bの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_B^L \equiv \mathbf{x}_B^L = (\underline{x}_B^L \quad \underline{y}_B^L \quad \underline{z}_B^L) : \text{座標系Lから見た座標系Bの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_A^I \equiv \mathbf{x}_A^I = (\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I) : \text{座標系Iから見た座標系Aの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_A^L \equiv \mathbf{x}_A^L = (\underline{x}_A^L \quad \underline{y}_A^L \quad \underline{z}_A^L) : \text{座標系Lから見た座標系Aの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_L^I{}^T \cdot \mathbf{a}_I^I = (\underline{x}_I^L \quad \underline{y}_I^L \quad \underline{z}_I^L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Lから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_B^I{}^T \cdot \mathbf{a}_I^I = (\underline{x}_I^B \quad \underline{y}_I^B \quad \underline{z}_I^B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Bから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

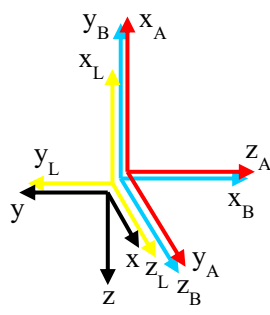
$$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{D}_B^L{}^T \cdot \mathbf{a}_L^L = (\underline{x}_L^B \quad \underline{y}_L^B \quad \underline{z}_L^B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{座標系Bから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_A^I{}^T \cdot \mathbf{a}_I^I = (\underline{x}_I^A \quad \underline{y}_I^A \quad \underline{z}_I^A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Aから見た座標系Iの軸ベクトル群}$$

$$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{D}_A^L{}^T \cdot \mathbf{a}_L^L = (\underline{x}_L^A \quad \underline{y}_L^A \quad \underline{z}_L^A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \text{座標系Aから見た座標系Lの軸ベクトル群}$$

4 回転マトリクスの縮退

回転を目視で容易に確認できるよう、回転マトリクスの縮退形を下記に示す。

$\mathbf{D}_L^I = [90^\circ]_2$ $\mathbf{D}_B^I = [-90^\circ]_3$ $\mathbf{D}_A^I = [90^\circ]_1$ $\mathbf{D}_B^L = [90^\circ]_2 \cdot [-90^\circ]_3$ $\mathbf{D}_A^L = [90^\circ]_2 \cdot [90^\circ]_1$ $\mathbf{D}_A^B = [90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_1$	$(\mathbf{D}_B^I)^I = [-90^\circ]_1$ $(\mathbf{D}_A^I)^I = [-90^\circ]_3$ $(\mathbf{D}_A^B)^I = [-90^\circ]_3 \cdot [90^\circ]_1$ $(\mathbf{D}_A^B)^L = [90^\circ]_1 \cdot [90^\circ]_3$ $(\mathbf{D}_L^I)^I = \mathbf{D}_L^I$ $(\mathbf{D}_B^I)^I = \mathbf{D}_B^I$ $(\mathbf{D}_A^I)^I = \mathbf{D}_A^I$	$(\mathbf{D}_L^I) = [90^\circ]_2$ $(\mathbf{D}_B^I) = [-90^\circ]_3$ $(\mathbf{D}_A^I) = [90^\circ]_1$	
---	--	--	---

5 例題の結果

下記の4種類の体(非可換体)をまとめて、

- ・方向余弦マトリクス
- ・固定角型回転マトリクス
- ・オイラー角型四元数
- ・固定角型四元数

結果を下記に示す。

表5-1 座標系の回転

表5-2 ベクトルの回転

表5-3 ベクトルの座標変換

さらに、単純に固定角順に合成した下記の2種類の体(非可換体)について、

- ・固定角順回転マトリクス
- ・固定角順四元数

参考として並べて示したオイラー角順の方向余弦マトリクスおよびオイラー角型四元数と対比して、結果を下記に示す。

表5-4 固定角順の体(非可換体)による座標系の回転

表5-5 固定角順の体(非可換体)によるベクトルの回転

表5-6 固定角順の体(非可換体)によるベクトルの座標変換

表5-1 座標系の回転

No.	方向余弦マトリクスによる回転				固定角型回転マトリクスによる回転			
1	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^I$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_L^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_L^I)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_L^I$	⊙
2	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^I$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}$	⊙	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_B^I$	⊙
3	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L$	⊙	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{D}_B^{L^T}$	⊙	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L$	×	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{D}_B^L)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_B^L$	×
4	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^I$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{I^T}$	⊙	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_A^I)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_A^I$	⊙
5	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L$	⊙	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{D}_A^{L^T}$	⊙	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L$	×	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{D}_A^L)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_A^L$	×
6	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_B^I$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}$	⊙	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_B^I)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_B^I$	⊙
7	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_A^I$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{I^T}$	⊙	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_A^I)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_A^I$	⊙
8	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_A^B$	⊙	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{B^T}$	⊙	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{x}_B^I$	⊙	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_A^B)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_A^I$	⊙
9					$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^B)^L \cdot \mathbf{x}_B^L$	⊙	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_A^B)^{L^T} \cdot \mathbf{x}_A^L$	⊙
No.	オイラー角型四元数による回転				固定角型四元数による回転			
21	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_L^I$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{Q}_L^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_L^I)^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^I$	⊙
22	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	×	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^I$	⊙
23	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	⊙	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L$	⊙	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{Q}_B^L)^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^I$	×
24	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	×	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I)^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^I$	⊙
25	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	⊙	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	⊙	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{Q}_A^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{Q}_A^L)^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^I$	×
26	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	⊙	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^I$	⊙
27	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	⊙	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^I$	⊙
28	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	×	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^B$	×	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^B)^I \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{I*}$	⊙	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_A^B)^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^I$	⊙
29					$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{Q}_A^B)^L \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{L*}$	⊙	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{Q}_A^B)^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^L$	⊙

座標系の回転はオイラー角による方向余弦マトリクスを用いて行うのが一般的である。例えば、方向余弦マトリクスの基準座標系がLで、演算対象ベクトルの基準座標系がIと異なっても、合成された方向余弦マトリクスなら演算対象ベクトルと同じ基準座標系Iの方向余弦マトリクスを2つ合成した $\mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{D}_B^L$ と考えることができるので、基準座標系が異なっても正しく変換される。

方向余弦マトリクス以外の体(非可換体)も利用できるが、それらを表現する基準の座標系と演算対象の座標軸ベクトルを表現する基準の座標系が一致している必要がある。

$$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_L^I \cdot (\mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{D}_B^I) = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I$$

$$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{B^T} = \mathbf{D}_A^I \cdot (\mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{D}_A^I)^T = \mathbf{D}_A^I \cdot (\mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{D}_B^I) = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I$$

$$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}) \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{x}_B^I$$

$$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}) \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{x}_A^I$$

$$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_A^B)^{L^T} \cdot \mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^{L^T})^T \cdot \mathbf{D}_A^L = (\mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_A^{L^T}) \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{x}_B^L$$

基準の座標系が一致していないので変換できない例。

$$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}) \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^I$$

$$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^{I^T} \cdot \mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T})^T \cdot \mathbf{D}_B^I = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}) \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^B \cdot \mathbf{D}_B^I$$

表5-2 ベクトルの回転

No.	方向余弦マトリクスによる回転			固定角型回転マトリクスによる回転		
1	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_L^{LT} \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{D}_L^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
2	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{D}_L^L \cdot \mathbf{a}_I^B$	×	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_L^{LT} \cdot \mathbf{a}_L^A$	×	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_L^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^B$	×
3	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^{LT} \cdot \mathbf{a}_B^I$	×	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
4	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_B^{LT} \cdot \mathbf{a}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^L$	×
5	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^{LT} \cdot \mathbf{a}_A^I$	×	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
6	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_A^{LT} \cdot \mathbf{a}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^L$	×
7	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^{IT} \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
8	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^L$	×	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_B^{IT} \cdot \mathbf{a}_B^L$	×	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^L$	×
9	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^{IT} \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
10	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^L$	×	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_A^{IT} \cdot \mathbf{a}_A^L$	×	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^L$	×
11	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{a}_B^I$	×	$\mathbf{a}_B^A = \mathbf{D}_A^{BT} \cdot \mathbf{a}_A^I$	×	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎
12	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{a}_B^L$	×	$\mathbf{a}_B^A = \mathbf{D}_A^{BT} \cdot \mathbf{a}_A^L$	×	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_B^L$	×
13					$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^B)^L \cdot \mathbf{a}_B^L$	◎
No.	オイラー角型四元数による回転			固定角型四元数による回転		
21	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{Q}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^{I*}$	◎
22	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot \mathbf{Q}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{Q}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^{I*}$	×
23	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^L$	×	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*}$	◎
24	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*}$	×
25	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^L$	×	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^{I*}$	◎
26	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^{I*}$	×
27	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	◎
28	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^I$	×	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	×
29	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	◎
30	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^I$	×	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	×
31	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	×	$\mathbf{a}_B^A = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^B$	×	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{I*}$	◎
32	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	×	$\mathbf{a}_B^A = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^B$	×	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{I*}$	×
33					$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_A^B)^L \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{L*}$	◎

ベクトルの回転は固定角型回転マトリクスおよび固定角型四元数が利用できるが、基準の座標系が一致していなければならない。No.1およびNo.21は一致していないが、特殊なケースとして変換ができるものもある。

ベクトルの回転は次のように証明できる。

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{D}_L^{IT}) \cdot \mathbf{D}_L^I = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{a}_B^I$$

$$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{D}_B^{IT}) \cdot \mathbf{D}_B^I = \mathbf{D}_A^I = \mathbf{a}_A^I$$

$$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{D}_A^B)^{L^T} \cdot \mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{D}_B^{L^T})^T \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_A^{L^T} \cdot \mathbf{D}_A^L = \mathbf{D}_B^L = \mathbf{a}_B^L$$

基準の座標系が一致していないが、特殊な例として変換できる例。

$$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{D}_L^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^L = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^{L^T}) \cdot \mathbf{D}_I^L = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^L = \mathbf{D}_I^I = \mathbf{1}$$

基準の座標系が一致していないので変換できない例。

$$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^B = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^{L^T}) \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^B$$

$$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{D}_L^I)^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^A = (\mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^{L^T})^T \cdot \mathbf{D}_L^A = \mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{D}_L^A = \mathbf{D}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^A$$

表5-3 ベクトルの座標変換

No.	方向余弦マトリクスによる座標変換				固定角型回転マトリクスによる座標変換			
1	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{a}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{D}_L^{LT} \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{D}_L^I)^{IT} \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎
2	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{a}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{D}_L^{LT} \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_L^I)^{IT} \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎
3	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{a}_I^B$	◎	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_B^{LT} \cdot \mathbf{a}_I^L$	◎	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^B$	×	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{D}_B^L)^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^L$	×
4	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^B$	◎	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{D}_B^{LT} \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{D}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^B$	×	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_B^L)^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^L$	×
5	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{a}_I^A$	◎	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_A^{LT} \cdot \mathbf{a}_I^L$	◎	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{D}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^A$	×	$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{D}_A^L)^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^L$	×
6	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^A$	◎	$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{D}_A^{LT} \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{D}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^A$	×	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{D}_A^L)^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^L$	×
7	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^B$	◎	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_B^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^B$	◎	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{D}_B^I)^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
8	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^B$	◎	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{D}_B^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_L^B$	◎	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_B^I)^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
9	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^A$	◎	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_A^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^A$	◎	$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{D}_A^I)^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
10	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^A$	◎	$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{D}_A^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_L^A$	◎	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{D}_A^I)^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
11	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{a}_I^A$	◎	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_A^{BT} \cdot \mathbf{a}_I^B$	◎	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_I^A$	×	$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{D}_A^B)^{IT} \cdot \mathbf{a}_I^B$	×
12	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{a}_L^A$	◎	$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{D}_A^{BT} \cdot \mathbf{a}_L^B$	◎	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_L^A$	×	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{D}_A^B)^{IT} \cdot \mathbf{a}_L^B$	×
13					$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_A^B)^L \cdot \mathbf{a}_L^A$	×	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{D}_A^B)^{LT} \cdot \mathbf{a}_L^B$	×
No.	オイラー角型四元数による座標変換				固定角型四元数による座標変換			
21	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{Q}_L^I)^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^I$	◎
22	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_L^I)^I \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_L^I)^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^I$	◎
23	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot \mathbf{Q}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{Q}_B^L)^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^I$	×
24	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{Q}_B^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^{I*}$	×	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{Q}_B^L)^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^I$	×
25	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{a}_I^A \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{Q}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_I^A \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{Q}_A^L)^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^I$	×
26	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{Q}_A^L)^I \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^{I*}$	×	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{Q}_A^L)^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^I$	×
27	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^I$	◎
28	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^I$	◎
29	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^A \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_I^A \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{Q}_A^I)^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^I$	◎
30	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I)^I \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{Q}_A^I)^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^I$	◎
31	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{a}_I^A \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	◎	$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot \mathbf{Q}_A^B$	◎	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{Q}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_I^A \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^A = (\mathbf{Q}_A^B)^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^I$	×
32	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{Q}_A^B \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot \mathbf{Q}_A^{B*}$	◎	$\mathbf{a}_L^A = \mathbf{Q}_A^{B*} \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot \mathbf{Q}_A^B$	◎	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{Q}_A^B)^I \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{I*}$	×	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{Q}_A^B)^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^I$	×
33					$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{Q}_A^B)^L \cdot \mathbf{a}_L^A \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^{L*}$	×	$\mathbf{a}_L^A = (\mathbf{Q}_A^B)^{L*} \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^L$	×

ベクトルの座標変換は方向余弦マトリクスまたはオイラー角型四元数を用いて、基準座標系の如何に依らず変換できる。

固定角型(回転マトリクスおよび四元数)の特例として、No.1～2、7～10 および No.21～22、27～30は、それぞれ方向余弦マトリクスおよびオイラー角型四元数と等しいので、方向余弦マトリクスおよびオイラー角型四元数と同じ結果となっている。

ベクトルの座標変換の式は次のように証明される。

$$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{a}_B^L = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^L = \mathbf{D}_B^I = \mathbf{a}_B^I$$

$$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_I^L = \mathbf{a}_I^L$$

$$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_A^B \cdot \mathbf{D}_I^A = \mathbf{D}_I^B = \mathbf{a}_I^B$$

$$\mathbf{a}_I^A = \mathbf{D}_A^{B^T} \cdot \mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_A^{B^T} \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_B^A \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_I^A = \mathbf{a}_I^A$$

変換できない固定角型の例。

$$\mathbf{a}_I^L = \left(\mathbf{D}_B^L\right)^I \cdot \mathbf{a}_I^B = \left(\mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}\right) \cdot \mathbf{D}_I^B = \mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_I^L \cdot \mathbf{D}_I^B$$

$$\mathbf{a}_I^B = \left(\mathbf{D}_B^L\right)^{I^T} \cdot \mathbf{a}_I^L = \left(\mathbf{D}_B^L \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}\right)^T \cdot \mathbf{D}_I^L = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{D}_I^L = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{D}_I^B \cdot \mathbf{D}_I^L$$

表5-4 固定角順の体(非可換体)による座標系の回転

No	方向余弦マトリクスによる回転(参考)				固定角順回転マトリクスによる回転			
1	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_L^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_L^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_L^I) \cdot \mathbf{x}_I^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_L^I)^T \cdot \mathbf{x}_L^I$	◎
2	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^I$	◎	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{x}_L^I$	×	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{x}_B^I$	×
3	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_B^L$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{D}_B^{L^T}$	◎	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{D}_B^L) \cdot \mathbf{x}_L^L$	◎	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{D}_B^L)^T \cdot \mathbf{x}_B^L$	◎
4	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_A^I$	◎	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{x}_L^I$	×	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{x}_A^I$	×
5	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{D}_A^L$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{D}_A^{L^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{D}_A^L) \cdot \mathbf{x}_L^L$	◎	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{D}_A^L)^T \cdot \mathbf{x}_A^L$	◎
6	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_B^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{D}_B^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{x}_I^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{x}_B^I$	◎
7	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{D}_A^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{D}_A^{I^T}$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{x}_I^I$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{x}_A^I$	◎
No	オイラー角型四元数による回転(参考)				固定角順四元数による回転			
21	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_L^I$	◎	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{Q}_L^I) \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^*$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_L^I)^* \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)$	◎
22	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	×	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	×	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	×
23	$\mathbf{x}_B^L = \mathbf{Q}_B^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_B^{L*}$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_B^{L*} \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^L$	◎	$\mathbf{x}_B^L = (\mathbf{Q}_B^L) \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)^*$	◎	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{Q}_B^L)^* \cdot \mathbf{x}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_B^L)$	◎
24	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	×	$\mathbf{x}_L^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	×	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{x}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	×	$\mathbf{x}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	×
25	$\mathbf{x}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	◎	$\mathbf{x}_L^L = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	◎	$\mathbf{x}_A^L = (\mathbf{Q}_A^L) \cdot \mathbf{x}_L^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^*$	◎	$\mathbf{x}_L^L = (\mathbf{Q}_A^L)^* \cdot \mathbf{x}_A^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)$	◎
26	$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{x}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
27	$\mathbf{x}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{x}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{x}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{x}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	◎	$\mathbf{x}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{x}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	◎

固定角順回転マトリクスと固定角順四元数ともに、それらの基準の座標系と対象ベクトルの基準の座標系が一致している必要がある。標準基底の座標軸の回転あるいはその逆方向の回転のみになるが、座標系の回転なので問題なく利用できる。

表5-5 固定角順の体(非可換体)によるベクトルの回転

No	方向余弦マトリクスによる回転(参考)				固定角順回転マトリクスによる回転			
1	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_L^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_L^I)^T \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
2	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{a}_I^B$	×	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{D}_L^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^B$	×	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{D}_L^I) \cdot \mathbf{a}_I^B$	×	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{D}_L^I)^T \cdot \mathbf{a}_L^B$	×
3	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_B^I$	×	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_B^I$	×
4	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_B^L$	◎	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_B^L$	◎
5	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_A^I$	×	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_A^I$	×
6	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_L^L$	◎	$\mathbf{a}_L^L = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_A^L$	◎
7	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎
8	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^L$	×	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_B^L$	×	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^L$	×	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_B^L$	×
9	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎
10	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^L$	×	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_A^L$	×	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^L$	×	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_A^L$	×
No	オイラー角型四元数による回転(参考)				固定角順四元数による回転			
21	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_L^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_L^I)^* \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_L^I)$	◎
22	$\mathbf{a}_L^B = \mathbf{Q}_L^I \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot \mathbf{Q}_L^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^B = \mathbf{Q}_L^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot \mathbf{Q}_L^I$	×	$\mathbf{a}_L^B = (\mathbf{Q}_L^I) \cdot \mathbf{a}_I^B \cdot (\mathbf{Q}_L^I)^*$	×	$\mathbf{a}_I^B = (\mathbf{Q}_L^I)^* \cdot \mathbf{a}_L^B \cdot (\mathbf{Q}_L^I)$	×
23	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	×	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	×	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	×
24	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^L = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^L \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^L = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎

No	方向余弦マトリクスによる回転(参考)				固定角順回転マトリクスによる回転			
25	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	×	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^L$	×	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_A^L) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^*$	×	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^L)^* \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^L)$	×
26	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{Q}_A^L \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{L*}$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^{L*} \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^L$	◎	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_A^L) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^L)^*$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^L)^* \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot (\mathbf{Q}_A^L)$	◎
27	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
28	$\mathbf{a}_B^L = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot \mathbf{Q}_B^I$	×	$\mathbf{a}_B^L = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	×	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_B^L \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	×
29	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	◎
30	$\mathbf{a}_A^L = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	×	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot \mathbf{Q}_A^I$	×	$\mathbf{a}_A^L = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	×	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{a}_A^L \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	×

基準の座標系が一致しているベクトルは変換できるが、上の表を見れば分かるとおり、単位ベクトルの回転およびその逆の回転だけが可能なので、方向余弦マトリクスと同様にあまり意味がない結果になっており、一般のベクトルの回転に用いるのが妥当。

表5-6 固定角順の体 (非可換体) によるベクトルの座標変換

No	方向余弦マトリクスによる座標変換 (参考)				固定角順回転マトリクスによる座標変換			
1	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_B^I$	◎
2	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_A^I$	◎
3	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
4	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
5	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
6	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
7	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
8	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_B^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_B^I)^T \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
9	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_I^I$	◎
10	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{D}_A^{I^T} \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_A^I) \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{D}_A^I)^T \cdot \mathbf{a}_L^I$	◎
No	オイラー角型四元数による座標変換 (参考)				固定角順四元数による座標変換			
21	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_B^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
22	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_A^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_A^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
23	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
24	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
25	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	◎
26	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	◎
27	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
28	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_B^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_B^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_B^I)^* \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)$	◎
29	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_I^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_I^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	◎
30	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^I \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^{I*}$	◎	$\mathbf{a}_L^I = \mathbf{Q}_A^{I*} \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot \mathbf{Q}_A^I$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I) \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)^*$	◎	$\mathbf{a}_L^I = (\mathbf{Q}_A^I)^* \cdot \mathbf{a}_L^I \cdot (\mathbf{Q}_A^I)$	◎

基準座標系の如何に関わらず座標変換に利用できる。

6 まとめ

6.1 座標系の回転

方向余弦マトリクスは基準座標系の如何に関わらず利用できる。他の体 (非可換体) においては、それらを

表現する基準の座標系と演算対象の座標軸ベクトルを表現する基準の座標系が一致していれば利用できる。

$$\mathbf{x}_B^I = \mathbf{x}_L^I \cdot \mathbf{D}_B^I \Rightarrow (\underline{x}_B^I \ \underline{y}_B^I \ \underline{z}_B^I) = (\underline{x}_L^I \ \underline{y}_L^I \ \underline{z}_L^I) \cdot \mathbf{D}_B^I : \text{方向余弦マトリクスによる座標系の回転}$$

$$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot \mathbf{x}_L^I \Rightarrow (\underline{x}_B^I \ \underline{y}_B^I \ \underline{z}_B^I) = (\mathbf{D}_B^I)^I \cdot (\underline{x}_L^I \ \underline{y}_L^I \ \underline{z}_L^I) : \text{固定角型回転マトリクスによる座標系の回転}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_B^I &= \mathbf{Q}_B^I \cdot \underline{x} \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} \\ \underline{y}_B^I &= \mathbf{Q}_B^I \cdot \underline{y} \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} \\ \underline{z}_B^I &= \mathbf{Q}_B^I \cdot \underline{z} \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} \end{aligned} \right\} : \text{オイラー角型四元数による座標系の回転}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_B^I &= (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \underline{x} \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \\ \underline{y}_B^I &= (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \underline{y} \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \\ \underline{z}_B^I &= (\mathbf{Q}_B^I)^I \cdot \underline{z} \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^{I*} \end{aligned} \right\} : \text{固定角型四元数による座標系の回転}$$

$$\mathbf{x}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{x}_L^I \Rightarrow (\underline{x}_B^I \ \underline{y}_B^I \ \underline{z}_B^I) = (\mathbf{D}_B^I) \cdot (\underline{x} \ \underline{y} \ \underline{z}) : \text{固定角順回転マトリクスによる座標系の回転}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_B^I &= (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \underline{x} \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^* \\ \underline{y}_B^I &= (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \underline{y} \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^* \\ \underline{z}_B^I &= (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \underline{z} \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^* \end{aligned} \right\} : \text{固定角順四元数による座標系の回転}$$

6.2 ベクトルの回転

固定角型の回転マトリクスおよび四元数は、基準座標系が一致していれば利用できる。

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_A^B)^{IT} \cdot \mathbf{a}_A^I : \text{固定角型回転マトリクスによるベクトルの回転}$$

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_A^B)^{I*} \cdot \mathbf{a}_A^I \cdot (\mathbf{Q}_A^B)^I : \text{固定角型四元数によるベクトルの回転}$$

方向余弦マトリクスとオイラー角型四元数および、固定角順回転マトリクスと固定角順四元数は、基準座標系の単位ベクトルの回転とその逆方向の回転のみ表現可能なので、任意の座標系に沿った回転には向いていない。

$$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I : \text{方向余弦マトリクスによるベクトルの回転}$$

$$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_B^I \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot \mathbf{Q}_B^{I*} : \text{オイラー角型四元数によるベクトルの回転}$$

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I : \text{固定角順回転マトリクスによるベクトルの回転}$$

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_B^I) \cdot \mathbf{a}_I^I \cdot (\mathbf{Q}_B^I)^* : \text{固定角順四元数によるベクトルの回転}$$

固定角順の回転マトリクスおよび四元数は座標系に沿った回転ではなく、一般のベクトルの回転に利用する。

$$\mathbf{a}' = [\theta_n]_p \cdots [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{a} : \text{固定角順回転マトリクスによるベクトルの回転}$$

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{Q}) \otimes \mathbf{a} \otimes (\mathbf{Q})^* : \text{固定角順四元数によるベクトルの回転}$$

6.3 ベクトルの座標変換

方向余弦マトリクスおよびオイラー角型四元数ならびに、固定角順回転マトリクスおよび固定角順四元数は、基準座標系の如何に関わらず利用できる。

固定角型回転マトリクスおよび固定角型四元数は使えない。

$$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{D}_L^I \cdot \mathbf{a}_B^L \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{x_B}^I \\ a_{y_B}^I \\ a_{z_B}^I \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^I \cdot \begin{pmatrix} a_{x_B}^L \\ a_{y_B}^L \\ a_{z_B}^L \end{pmatrix} : \text{方向余弦マトリクスによるベクトルの座標変換}$$

$$\mathbf{a}_B^I = \mathbf{Q}_L^I \otimes \mathbf{a}_B^L \otimes \mathbf{Q}_L^{I*} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{x_B}^I \\ a_{y_B}^I \\ a_{z_B}^I \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_L^I \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ a_{x_B}^L \\ a_{y_B}^L \\ a_{z_B}^L \end{pmatrix} \otimes \mathbf{Q}_L^{I*} : \text{オイラー角型四元数によるベクトルの座標変換}$$

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{D}_L^I) \cdot \mathbf{a}_B^L \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{x_B}^I \\ a_{y_B}^I \\ a_{z_B}^I \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_L^I) \cdot \begin{pmatrix} a_{x_B}^L \\ a_{y_B}^L \\ a_{z_B}^L \end{pmatrix} : \text{固定角順回転マトリクスによるベクトルの座標変換}$$

$$\mathbf{a}_B^I = (\mathbf{Q}_L^I) \otimes \mathbf{a}_B^L \otimes (\mathbf{Q}_L^I)^* \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{x_B}^I \\ a_{y_B}^I \\ a_{z_B}^I \end{pmatrix} = (\mathbf{Q}_L^I) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ a_{x_B}^L \\ a_{y_B}^L \\ a_{z_B}^L \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{Q}_L^I)^* : \text{固定角順四元数によるベクトルの座標変換}$$