第2章　　慣性航法のアリゴリズム

目　　　　　次

1　座標系 4
1.1　座標系の表現 4
1.2　座標系の回転 7
1.3　座標変換 11
2　姿勢の計算方法 13
2.1　姿勢の表現方法 13
2.2　姿勢の回転の表現 14
2.2.1　オイラー軸 14
2.2.2　オイラー軸とその周りの回転角 15
2.2.3　回転角ベクトル 17
2.2.4　コーニング運動 18
2.3　姿勢の計算法 20
2.3.1　方向余弦マトリクス法 20
2.3.2　オイラー角法 22
2.3.3　四元数（クォータニオン）法 27
2.4　座標回転の補正（コーニング補正） 36
2.5　姿勢計算誤差及びその改良法 40
2.5.1　姿勢計算誤差の表現 40
2.5.2　打ち切り誤差 43
2.5.3　姿勢計算誤差の改良法 46
2.5.4　姿勢誤差の評価 49
3　位置及び速度の計算方法 56
3.1　位置及び速度 56
3.2　推力と空気力による速度増分ベクトル 57
3.3　座標回転の補正（スカーリング補正） 59

図　表　リ　ス　ト

図1.1-1　3軸直交右手系座標系 4
図1.1-2　ベクトルの表現 4
図1.1-3　座標系から見た別の座標軸ベクトル 5
図1.2-1　ベクトルの回転 7
図1.2-2　基準座標系における座標系の回転 8
図1.2-3　2つの座標系間の回転 9
図1.3-1　ベクトルの座標変換 11
表2.1-1　姿勢の表現方法 13
図2.2-1　姿勢の回転 14
図2.2-2　コーニング運動 19
図2.3-1　オイラー角 22
表2.3-1　オイラー角から方向余弦マトリクスへの変換 23
表2.3-2　方向余弦からオイラー角への変換 24
表2.3-3　座標軸ベクトルからオイラー角への変換 24
表2.3-4　オイラー角微係数への変換マトリクス 26
図2.3-2　回転座標系におけるオイラー軸 34
図2.5-1　姿勢計算誤差 40
表2.5-1　姿勢更新における近似係数 46
表2.5-2　姿勢更新における近似係数の改良 48
図2.5-1　量子化誤差 49
表2.5-3　姿勢更新における近似係数 51
表2.5-4　姿勢更新における近似係数 51
図2.5-2　切り捨て誤差 52
図3.2-1　回転座標系での速度増分の積算 57
図3.3-1　座標回転の補正(スカーリング補正) 59

1　座標系

本書で用いる座標系や関連諸量について、基本的な表記を説明する。

1.1　座標系の表現

宇宙飛行体の位置、速度及び姿勢を3次元空間で表現するには、基準となる座標系が必要となる。本書で用いている座標系の定義を以下に示す。

(1)　基底の座標系

全ての座標系の基になる座標系をここでは基底の座標系と呼び、3軸直交右手系座標系(o-x，y，z)として下記の座標軸単位ベクトルで表す。

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}、\underline{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}、\underline{z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}1)$$

この基底座標系は、本書では「慣性座標系」や「基準座標系」として用いる。

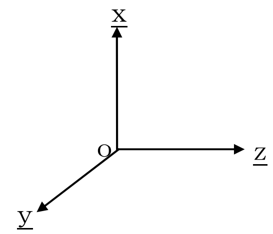


図1.1-1　3軸直交右手系座標系

(2)　方向余弦及びベクトルの表現

3次元空間における任意のベクトルは、上記の基底座標系から見た方向余弦で表すことができる。図1.1-2に示したベクトル $\mathbf{a}$ は、ベクトル $\mathbf{a}$ と座標系x軸、y軸、z軸の各軸ベクトルとの間の角度で表すことができる。この角度は方向角と呼ばれ、その余弦をとった方向余弦を用いて、各軸方向の成分に分解できる。

$$\left.\begin{aligned}
d_x &= \cos(\gamma_x)=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\underline{x}\\
d_y &= \cos(\gamma_y)=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\underline{y}\\
d_z &= \cos(\gamma_z)=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\underline{z}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}2)$$

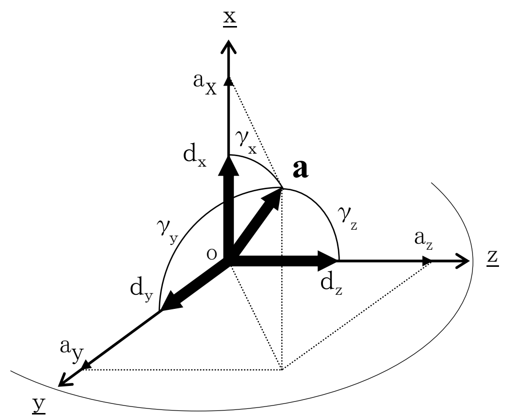


図1.1-2　ベクトルの表現

このとき、ベクトル $\mathbf{a}$ は各軸方向成分のベクトルを合成した形式で、下記のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= |\mathbf{a}|\left(d_x\underline{x}+d_y\underline{y}+d_z\underline{z}\right)=(\mathbf{a}\cdot\underline{x})\underline{x}+(\mathbf{a}\cdot\underline{y})\underline{y}+(\mathbf{a}\cdot\underline{z})\underline{z}\\
&= a_x\underline{x}+a_y\underline{y}+a_z\underline{z} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}3)
\end{aligned}$$

また、ベクトル $\mathbf{a}$ は上記の成分(方向余弦)を列挙する形式で下記のように表される。

$$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\begin{pmatrix}d_x\\d_y\\d_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{x}\\\mathbf{a}\cdot\underline{y}\\\mathbf{a}\cdot\underline{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}4)$$

なお、単位ベクトルは下線付きで表し、一般のベクトルと区別するものとする。座標軸単位ベクトルも下線付きで表記しているが、一般の正規化されたベクトルも下線付きで下記のように表記するものとする。

$$\underline{a}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\begin{pmatrix}d_x\\d_y\\d_z\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}5)$$

（3） 一般の座標系

一般の座標系は基底の座標系を基に定義される。

一般の座標系を3軸直交右手座標系（o-ξ，η，ζ）としたとき、基底座標系から見た3つの座標軸単位ベクトルは、前記（2）項に示した方向余弦を用いて下記のように表される。

$$\left.\begin{aligned}
\underline{\xi} &= (\underline{\xi}\cdot\underline{x})\underline{x} + (\underline{\xi}\cdot\underline{y})\underline{y} + (\underline{\xi}\cdot\underline{z})\underline{z} = \xi_x\underline{x} + \xi_y\underline{y} + \xi_z\underline{z} \\
\underline{\eta} &= (\underline{\eta}\cdot\underline{x})\underline{x} + (\underline{\eta}\cdot\underline{y})\underline{y} + (\underline{\eta}\cdot\underline{z})\underline{z} = \eta_x\underline{x} + \eta_y\underline{y} + \eta_z\underline{z} \\
\underline{\zeta} &= (\underline{\zeta}\cdot\underline{x})\underline{x} + (\underline{\zeta}\cdot\underline{y})\underline{y} + (\underline{\zeta}\cdot\underline{z})\underline{z} = \zeta_x\underline{x} + \zeta_y\underline{y} + \zeta_z\underline{z}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1.1\text{-}6)$$

前記（2）項に示したベクトル $\mathbf{a}$ は、この座標軸ベクトルを用いて（1.1-3）式と同様に、下記のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (\mathbf{a}\cdot\underline{\xi})\underline{\xi} + (\mathbf{a}\cdot\underline{\eta})\underline{\eta} + (\mathbf{a}\cdot\underline{\zeta})\underline{\zeta} \\
&= a_\xi\underline{\xi} + a_\eta\underline{\eta} + a_\zeta\underline{\zeta} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}7)
\end{aligned}$$

また、ベクトル $\mathbf{a}$ は上記の成分（方向余弦）を列挙する形式で（1.1-4）式と同様に表すことができるが、どの座標系から見た成分（方向余弦）か識別できるよう、基準とする座標系の記号を右上添字として付加して識別するものとする。

上記の座標系（o-ξ，η，ζ）の識別記号をFとすれば、「座標系Fから見たベクトル $\mathbf{a}$」は下記のように表される。

$$\mathbf{a}^F = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.1\text{-}8)$$

（4） 方向余弦マトリクス

座標系（o-x, y, z）を識別記号I、座標系（o-ξ，η，ζ）の識別記号をFとすれば、上記（1.1-6）式の座標軸ベクトルは下記で表される。

$$\left.\begin{aligned}
\underline{\xi}^I &= \begin{pmatrix} \underline{\xi}\cdot\underline{x} \\ \underline{\xi}\cdot\underline{y} \\ \underline{\xi}\cdot\underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} \\
\underline{\eta}^I &= \begin{pmatrix} \underline{\eta}\cdot\underline{x} \\ \underline{\eta}\cdot\underline{y} \\ \underline{\eta}\cdot\underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{pmatrix} \\
\underline{\zeta}^I &= \begin{pmatrix} \underline{\zeta}\cdot\underline{x} \\ \underline{\zeta}\cdot\underline{y} \\ \underline{\zeta}\cdot\underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1.1\text{-}9)$$

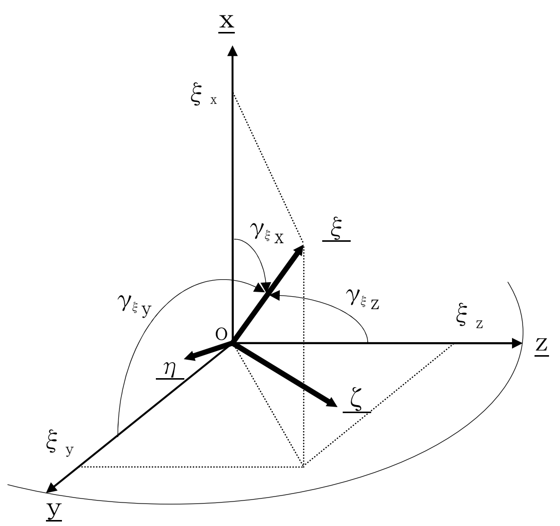


図1.1-3　座標系から見た別の座標軸ベクトル

上記をまとめてマトリクス形式にしたものは方向余弦マトリクスと呼ばれ、下記のように表される。

$$\mathbf{D}_F^I = \begin{pmatrix} \underline{\xi}^I & \underline{\eta}^I & \underline{\zeta}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\xi} & \underline{\eta} & \underline{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\xi}\cdot\underline{x} & \underline{\eta}\cdot\underline{x} & \underline{\zeta}\cdot\underline{x} \\ \underline{\xi}\cdot\underline{y} & \underline{\eta}\cdot\underline{y} & \underline{\zeta}\cdot\underline{y} \\ \underline{\xi}\cdot\underline{z} & \underline{\eta}\cdot\underline{z} & \underline{\zeta}\cdot\underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \cdots\cdots (1.1\text{-}10)$$

一般に、ある座標系（o-x_A, y_A, z_A）は、基準とする座標系（o-x_R, y_R, z_R）から見た方向余弦マトリクスで表さ

れ、それぞれの座標系を識別する記号を添字として用いて、下記のように表現される。

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_A &= d_{11}\underline{x}_R + d_{21}\underline{y}_R + d_{31}\underline{z}_R \\ \underline{y}_A &= d_{12}\underline{x}_R + d_{22}\underline{y}_R + d_{32}\underline{z}_R \\ \underline{z}_A &= d_{13}\underline{x}_R + d_{23}\underline{y}_R + d_{33}\underline{z}_R \end{aligned}\right\} \text{のとき}$$

$$\mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_A\cdot\underline{x}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{x}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{x}_R \\ \underline{x}_A\cdot\underline{y}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{y}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{y}_R \\ \underline{x}_A\cdot\underline{z}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{z}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{z}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (1.1\text{-}11)$$

上記の方向余弦マトリクスは、添字を上から下にD、R、Aと読むものとする。

この座標系Rから見た座標系Aの方向余弦マトリクスは、座標系Rから見た座標系Aの3つの座標軸ベクトルで構成されている、ということもできる。

また、この方向余弦マトリクスの転置マトリクスは、下記のように表される。

$$\left(\mathbf{D}_A^R\right)^T = \mathbf{D}_R^A = \begin{pmatrix} \underline{x}_R\cdot\underline{x}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{x}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{x}_A \\ \underline{x}_R\cdot\underline{y}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{y}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{y}_A \\ \underline{x}_R\cdot\underline{z}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{z}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{z}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^A & \underline{y}_R^A & \underline{z}_R^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix}^T \quad \cdots\cdots\cdots (1.1\text{-}12)$$

方向余弦マトリクスとその転置マトリクスの積は、下記に示したように単位マトリクスになる。

$$\left(\mathbf{D}_A^R\right)^T \cdot \mathbf{D}_A^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_R\cdot\underline{x}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{x}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{x}_A \\ \underline{x}_R\cdot\underline{y}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{y}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{y}_A \\ \underline{x}_R\cdot\underline{z}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{z}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{z}_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A\cdot\underline{x}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{x}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{x}_R \\ \underline{x}_A\cdot\underline{y}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{y}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{y}_R \\ \underline{x}_A\cdot\underline{z}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{z}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{z}_R \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (1.1\text{-}13)$$

$$\mathbf{D}_A^R \cdot \left(\mathbf{D}_A^R\right)^T = \begin{pmatrix} \underline{x}_A\cdot\underline{x}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{x}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{x}_R \\ \underline{x}_A\cdot\underline{y}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{y}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{y}_R \\ \underline{x}_A\cdot\underline{z}_R & \underline{y}_A\cdot\underline{z}_R & \underline{z}_A\cdot\underline{z}_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_R\cdot\underline{x}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{x}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{x}_A \\ \underline{x}_R\cdot\underline{y}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{y}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{y}_A \\ \underline{x}_R\cdot\underline{z}_A & \underline{y}_R\cdot\underline{z}_A & \underline{z}_R\cdot\underline{z}_A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x}_R^A & \underline{y}_R^A & \underline{z}_R^A \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_R^A & \underline{y}_R^A & \underline{z}_R^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (1.1\text{-}14)$$

また、方向余弦マトリクスと逆マトリクスの積は単位マトリクスになるから

$$\mathbf{D}_A^R \cdot \left(\mathbf{D}_A^R\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (1.1\text{-}15)$$

上式と(1.1-14)式を対比して、方向余弦マトリクスの逆マトリクスは転置マトリクスに等しいことが分かる。

$$\left(\mathbf{D}_A^R\right)^{-1} = \left(\mathbf{D}_A^R\right)^T \quad \cdots\cdots\cdots (1.1\text{-}16)$$

1.2 座標系の回転

(1) ベクトルの回転

図1.2-1に示した任意のベクトル $\mathbf{a}$ は下記のように表される。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha\cos\beta \\ a\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}1)$$

上記のベクトルをx軸回りに角度 θ だけ回転したベクトル $\mathbf{a}'$ は下記のように表される。

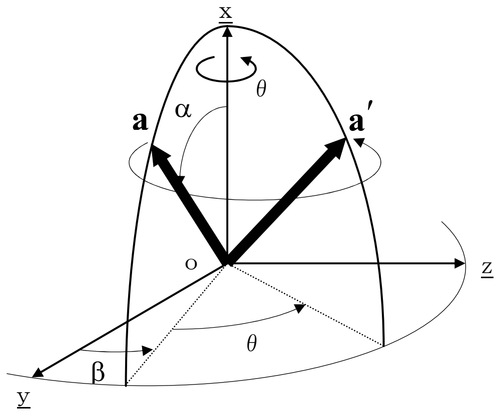


図1.2-1　ベクトルの回転

$$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha\cos(\beta+\theta) \\ a\sin\alpha\sin(\beta+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta) \\ a\sin\alpha(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y\cos\theta-a_z\sin\theta \\ a_z\cos\theta+a_y\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}2)$$

(2) 回転マトリクス

上記(1)項に示したベクトルの回転はy軸及びz軸についても考えられ、それらは下記のように表される。

$$\mathbf{a}' = [\theta]_i \cdot \mathbf{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}3)$$

ここで、i＝1のとき、x軸回りの回転

i＝2のとき、y軸回りの回転

i＝3のとき、z軸回りの回転を表す下記のマトリクスである。

$$[\theta]_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}4)$$

$$[\theta]_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}5)$$

$$[\theta]_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}6)$$

上記の回転を多段階に、任意の軸回りに任意の順序で行って得られるベクトルは下記のように表され、この回転によってベクトルを任意の方向に向けることができる。

$$\mathbf{a}^{(n)\prime} = [\theta_n]_p \cdot \mathbf{a}^{(n-1)\prime} = [\theta_n]_p \cdots\cdots [\theta_2]_j \cdot \mathbf{a}'$$

$$= [\theta_n]_p \cdots\cdots [\theta_2]_j \cdot [\theta_1]_i \cdot \mathbf{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2\text{-}7)$$

ここで、θ_1、θ_2・・・・θ_n:回転角を表し、それぞれ1回目、2回目・・・・n回目の回転角

i、j・・・・p　:回転軸を表し、それぞれ1 or 2 or 3の何れかを示す

（3） 基準座標系における座標系の回転

基準とする座標系（o−x, y, z）から見た任意の座標系（o−x_R, y_R, z_R）及び座標系（o−x_G, y_G, z_G）の方向余弦マトリクスを下記のように表す。

$$\mathbf{D}_R^I=\left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) \cdots\cdots (1.2\text{−}8)$$

$$\mathbf{D}_G^I=\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right) \cdots\cdots (1.2\text{−}9)$$

このとき、座標系（o−x_R, y_R, z_R）の座標軸単位ベクトル $\underline{x}_R^I, \underline{y}_R^I, \underline{z}_R^I$ に前記（2）項に示したベクトルの回転を適用して、それぞれ得られた軸を新たに座標系（o−x_G, y_G, z_G）の座標軸単位ベクトル $\underline{x}_G^I, \underline{y}_G^I, \underline{z}_G^I$ とすれば、それらは下記のように表される。

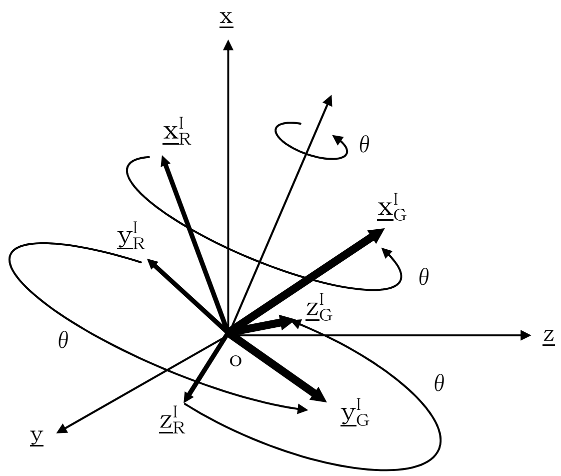


図1.2−2　基準座標系における座標系の回転

$$\underline{x}_G^I=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i\cdot\underline{x}_R^I \cdots\cdots (1.2\text{−}10)$$

$$\underline{y}_G^I=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i\cdot\underline{y}_R^I \cdots\cdots (1.2\text{−}11)$$

$$\underline{z}_G^I=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i\cdot\underline{z}_R^I \cdots\cdots (1.2\text{−}12)$$

上記の3式をまとめてマトリクス表現にすると

$$\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right)=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i\cdot\left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) \cdots\cdots (1.2\text{−}13)$$

$$\mathbf{D}_G^I=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i\cdot\mathbf{D}_R^I \cdots\cdots (1.2\text{−}14)$$

この両辺に右から $\mathbf{D}_R^I$ の転置マトリクスを掛けて変形すると

$$\mathbf{D}_G^I\cdot\left(\mathbf{D}_R^I\right)^T=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i\cdot\mathbf{D}_R^I\cdot\left(\mathbf{D}_R^I\right)^T=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i$$

$$\equiv\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I=[\theta_n]_p\cdots\cdots[\theta_2]_j\cdot[\theta_1]_i \cdots\cdots (1.2\text{−}15)$$

ここで$\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I$は、座標系Iから見たときの座標系Rから座標系Gへの回転を表すマトリクスである。

$$\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right)=\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I\cdot\left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) \cdots\cdots (1.2\text{−}16)$$

$$\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I=\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right)\cdot\left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right)^T \cdots\cdots (1.2\text{−}17)$$

この回転を表すマトリクスは、（4）項に示す方向余弦マトリクス $\mathbf{D}_G^R$ とは異なるが、上式の座標系Rが任意の座標系で成立するのでこれを基準座標系Iと同じに採った場合、右辺の座標軸単位ベクトルで表している座標系Rは基底の座標系となって単位マトリクスとなるから、上式は下記のとおり、I座標系から見たG座標系の方向余弦マトリクスと同じになる。

$$\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right)=\left(\mathbf{D}_G^I\right)^I\cdot\left(\underline{x}_I^I \quad \underline{y}_I^I \quad \underline{z}_I^I\right)=\left(\mathbf{D}_G^I\right)^I\cdot\left[\mathbf{1}\right]=\left(\mathbf{D}_G^I\right)^I \text{より}$$

$$\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right)\equiv\mathbf{D}_G^I=\left(\mathbf{D}_G^I\right)^I \cdots\cdots (1.2\text{−}18)$$

次に、座標系Iから見たときの座標系Rを座標系Aへ回転し、さらに座標系Aから座標系Gへ回転すると上記の（1.2−16）式の表記を用いて

$\left(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I\right) = \left(\mathbf{D}_A^R\right)^I \cdot \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right)$ 及び

$\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right) = \left(\mathbf{D}_G^A\right)^I \cdot \left(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I\right)$ より

$$\left(\underline{x}_G^I \quad \underline{y}_G^I \quad \underline{z}_G^I\right) = \left(\mathbf{D}_G^A\right)^I \cdot \left(\mathbf{D}_A^R\right)^I \cdot \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) = \left(\mathbf{D}_G^R\right)^I \cdot \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right)$$

よって、座標系Iから見たときの座標系Rを座標系Aへ回転させ、さらに座標系Aから座標系Gへ回転させるマトリクスは次のように表される。

$$\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I = \left(\mathbf{D}_G^A\right)^I \cdot \left(\mathbf{D}_A^R\right)^I \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}19)$$

（4）2つの座標系間の回転

座標系（o-x, y, z）から見た任意の座標系（o-x_R, y_R, z_R）の座標軸単位ベクトルを $\underline{x}_R^I, \underline{y}_R^I, \underline{z}_R^I$ で表したとき、x_R軸回りに角度 θ_1だけ回転してできる座標系を座標系（o-x_A, y_A, z_A）とすると、新たにできた座標系の座標軸単位ベクトルは以下のように表される。

$$\underline{x}_A^I = \underline{x}_R^I \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}20)$$

$$\underline{y}_A^I = \cos\theta_1 \cdot \underline{y}_R^I + \sin\theta_1 \cdot \underline{z}_R^I \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}21)$$

$$\underline{z}_A^I = -\sin\theta_1 \cdot \underline{y}_R^I + \cos\theta_1 \cdot \underline{z}_R^I \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}22)$$

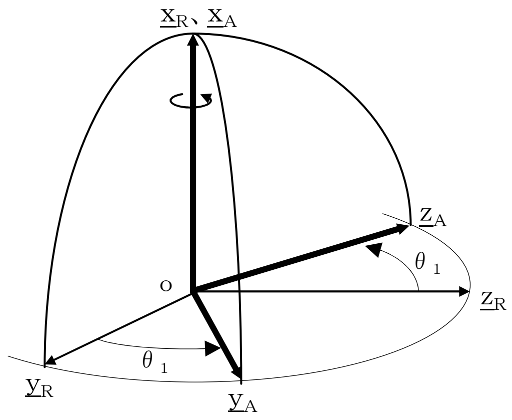


図1.2-3　2つの座標系間の回転

上式をまとめると、回転後の座標系は前（2）項に示した回転マトリクスを用いて下記のように表現される。

$$\left(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I\right) = \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}23)$$

上記の座標系の回転は、y_R軸及びz_R軸についても考えられるので、一般的には何れかの軸回りに角度 θ_1 だけ回転してできる座標系を下記のように表すことができる。

$$\left(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I\right) = \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) \cdot \left[\theta_1\right]_i \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}24)$$

ここで、i＝1 or 2 or 3

上式の回転マトリクスは座標系（o-x_R, y_R, z_R）から見た座標系（o-x_A, y_A, z_A）の各成分（方向余弦）をマトリクスにまとめたものであり、4.1-(4)項に示した方向余弦マトリクスとして下記で表される。

$$\mathbf{D}_A^R = \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right)^T \cdot \left(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I\right) = \begin{pmatrix} \underline{x}_A^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{x}_R^I \\ \underline{x}_A^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{y}_R^I \\ \underline{x}_A^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{y}_A^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{z}_A^I \cdot \underline{z}_R^I \end{pmatrix} = \left[\theta_1\right]_i \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}25)$$

よって、上記（1.2-24）式の座標系の回転は、方向余弦マトリクスでは下記のように表現される。

$$\mathbf{D}_A^I = \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_A^R \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}26)$$

次に、回転してできた新しい座標系を基準として、x_A, y_A, z_Aのいずれかの軸回りに角度 θ_2だけ回転してできる座標系を座標系（o-x_B, y_B, z_B）とすると、上記と同様に新たにできた座標系は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\underline{x}_B^I \quad \underline{y}_B^I \quad \underline{z}_B^I\right) &= \left(\underline{x}_A^I \quad \underline{y}_A^I \quad \underline{z}_A^I\right) \cdot \left[\theta_2\right]_j \\ &= \left(\underline{x}_R^I \quad \underline{y}_R^I \quad \underline{z}_R^I\right) \cdot \left[\theta_1\right]_i \cdot \left[\theta_2\right]_j \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}27) \end{aligned}$$

このように、順次新しくできた座標系の軸回りに回転を続け、最終的に座標系（o-x_G, y_G, z_G）が得られるとすると、それは下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdots\cdots [\theta_n]_p \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}28)$$

これを方向余弦マトリクスで表現して

$$\mathbf{D}_G^I = \mathbf{D}_R^I \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdots\cdots [\theta_n]_p \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}29)$$

$$= \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{D}_A^R \cdot \mathbf{D}_B^A \cdots\cdots \mathbf{D}_G^F \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}30)$$

また、R座標系からG座標系までの回転を表すマトリクスは、上式の両辺に左から$\mathbf{D}_R^I$の転置マトリクスを掛けて変形して下記のように表される。

$$\left(\mathbf{D}_R^I\right)^T \cdot \mathbf{D}_G^I = \left(\mathbf{D}_R^I\right)^T \cdot \mathbf{D}_R^I \cdot [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdots\cdots [\theta_n]_p = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdots\cdots [\theta_n]_p$$

$$\equiv \mathbf{D}_G^R = [\theta_1]_i \cdot [\theta_2]_j \cdots\cdots [\theta_n]_p \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}31)$$

この回転を表すマトリクス$\mathbf{D}_G^R$は前記（3）項に示した$\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I$とは異なり、座標系（o-$x_R$, y_R, z_R）から見た座標系（o-x_G, y_G, z_G）の方向余弦マトリクスである。

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}_G^R \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}32)$$

$$\mathbf{D}_G^R = \begin{pmatrix} \underline{x}_R^I & \underline{y}_R^I & \underline{z}_R^I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_G^I & \underline{y}_G^I & \underline{z}_G^I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{x}_G^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{x}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{x}_R^I \\ \underline{x}_G^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{y}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{y}_R^I \\ \underline{x}_G^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{y}_G^I \cdot \underline{z}_R^I & \underline{z}_G^I \cdot \underline{z}_R^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_G^R & \underline{y}_G^R & \underline{z}_G^R \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}33)$$

前記（3）項に示した回転マトリクス$\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I$は（1.2-16）式のように、座標系Iから見たときの座標系Rから座標系Gまでの回転を表しているが、これを用いたベクトルの回転を考えると、座標系の回転と同じ回転を座標系Iで表したベクトルに与え、下記のように表すことができる。

$$\mathbf{b}^I = \left(\mathbf{D}_G^R\right)^I \cdot \mathbf{a}^I \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}34)$$

また、（4）項の方向余弦マトリクス$\mathbf{D}_G^R$は（1.2-18）式に示したとおり、回転マトリクス$\left(\mathbf{D}_G^R\right)^I$において座標系Iが座標系Rと同じ場合に相当することから、上記（1.2-34）式は下記のように表せて、座標系Rから座標系Gへ回転させるのと同じ回転を、座標系Rで表したベクトルに与えることとなる。

$$\mathbf{b}^R = \mathbf{D}_G^R \cdot \mathbf{a}^R \quad \cdots\cdots (1.2\text{-}35)$$

1.3 座標変換

図1.3-1に示した任意のベクトル $\mathbf{a}$ は、基底の座標系（o-x, y, z）で下記のように表される。

$$\mathbf{a}=a_x\underline{x}+a_y\underline{y}+a_z\underline{z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.3\text{-}1)$$

次に、座標系（o-x_R, y_R, z_R）をx_R軸回りに角度 θ だけ回転して得られる座標系を座標系（o-x_A, y_A, z_A）としたとき、ベクトル $\mathbf{a}$ は座標系（o-x_A, y_A, z_A）で下記のように表される。

$$\mathbf{a}=a_x\underline{x}+a_y\underline{y}+a_z\underline{z}=a_{x_A}\underline{x}_A+a_{y_A}\underline{y}_A+a_{z_A}\underline{z}_A \text{ より}$$

$$\mathbf{a}^A\equiv\begin{pmatrix}a_{x_A}\\a_{y_A}\\a_{z_A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\alpha\\a\sin\alpha\cos\beta\\a\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.3\text{-}2)$$

また、ベクトル $\mathbf{a}$ は座標系（o-x_R, y_R, z_R）では下記のように表される。

$$\mathbf{a}=a_x\underline{x}+a_y\underline{y}+a_z\underline{z}=a_{x_R}\underline{x}_R+a_{y_R}\underline{y}_R+a_{z_R}\underline{z}_R \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^R\equiv\begin{pmatrix}a_{x_R}\\a_{y_R}\\a_{z_R}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a\cos\alpha\\a\sin\alpha\cos(\beta+\theta)\\a\sin\alpha\sin(\beta+\theta)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a\cos\alpha\\a\sin\alpha(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta)\\a\sin\alpha(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a_{x_A}\\a_{y_A}\cos\theta-a_{z_A}\sin\theta\\a_{z_A}\cos\theta+a_{y_A}\sin\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{x_A}\\a_{y_A}\\a_{z_A}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\mathbf{a}^A\\
&=[\theta]_1\cdot\mathbf{a}^A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.3\text{-}3)
\end{aligned}$$

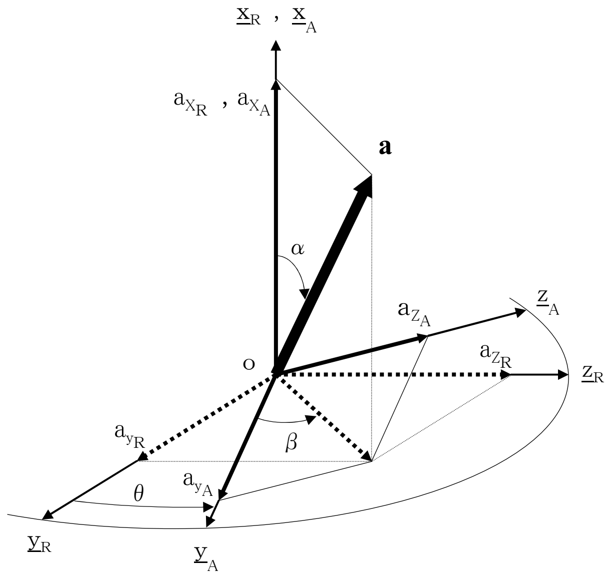


図1.3-1　ベクトルの座標変換

この回転マトリクスは座標系（o-x_R, y_R, z_R）から見た座標系（o-x_A, y_A, z_A）の方向余弦マトリクスでもあるから、上式は一般的に下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}^R=\begin{pmatrix}\underline{x}_A^R & \underline{y}_A^R & \underline{z}_A^R\end{pmatrix}\cdot\mathbf{a}^A=\mathbf{D}_A^R\cdot\mathbf{a}^A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.3\text{-}4)$$

上記は座標軸ベクトルを用いて下記のように表現することができる。

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\underline{x} & \underline{y} & \underline{z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{x}_R & \underline{y}_R & \underline{z}_R\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{x_R}\\a_{y_R}\\a_{z_R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{x}_A & \underline{y}_A & \underline{z}_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{x_A}\\a_{y_A}\\a_{z_A}\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}a_{x_R}\\a_{y_R}\\a_{z_R}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{x}_R & \underline{y}_R & \underline{z}_R\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\underline{x}_A & \underline{y}_A & \underline{z}_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{x_A}\\a_{y_A}\\a_{z_A}\end{pmatrix}=\mathbf{D}_A^R\cdot\begin{pmatrix}a_{x_A}\\a_{y_A}\\a_{z_A}\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.3\text{-}5)$$

このように、上記（1.3-4）式はベクトル $\mathbf{a}$ を座標系Aの方向余弦で表した量から座標系Rの方向余弦で表した量に変換するもので、座標変換と呼ばれる。

同様に、座標系（o-x_A, y_A, z_A）を回転して得られる座標系を座標系（o-x_B, y_B, z_B）としたとき、ベクトル $\mathbf{a}$

は座標系（o-x_A, y_A, z_A）で下記のように表される。

$$\mathbf{a}^{\mathrm{A}} = \left(\underline{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \quad \underline{y}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \quad \underline{z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}\right) \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{B}} = \mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{B}} \tag{1.3-6}$$

従って、このような座標変換を繰り返すと、下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}^{\mathrm{R}} = \mathbf{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{A}} = \mathbf{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{B}} = \cdots\cdots = \mathbf{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \cdots\cdots \mathbf{D}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{F}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{G}} \tag{1.3-7}$$

よって、ベクトルの座標変換は一般的に、1.2-(4)項に示した座標系間の回転を表す方向余弦マトリクスを用いて、下記のように表現される。

$$\mathbf{a}^{\mathrm{R}} = \mathbf{D}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{G}} \tag{1.3-8}$$

ここで、 $\mathbf{D}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{R}}$:R座標系から見たG座標系の方向余弦マトリクス

$\mathbf{a}^{\mathrm{R}}$:R座標系から見たベクトル $\mathbf{a}$

$\mathbf{a}^{\mathrm{G}}$:G座標系から見たベクトル $\mathbf{a}$

このように方向余弦マトリクスは、ベクトルの回転（1.2-35）式と座標変換（1.3-8）式に用いることができる。

2 姿勢の計算方法

2.1 姿勢の表現方法

宇宙飛行体の姿勢は、宇宙飛行体に固定した座標系（ここでは機体座標系と呼ぶ）を定義し、4.1項に示したように、基準となる座標系（ここでは慣性座標系と呼ぶ）から見た機体座標系の方向余弦マトリクスとして表される。但し、方向余弦マトリクスは9個の要素から成って計算量が比較的多いので、姿勢を求める航法計算においては、要素数を減らした各種の方法が下記の表のように考案されている。

表2.1-1　姿勢の表現方法

名称		パラメータ数	特異点	特徴
方向余弦マトリクス		9	無し	9パラメータ（3つの座標軸ベクトル）のうち、6パラメータ（2つの座標軸ベクトル）を先ず求め、他の3パラメータ（残り1つの座標軸ベクトル）はベクトルの外積により求める。
オイラー角	3ジンバル オイラー角	3	有り	3ジンバル機構における隣り合うジンバル間の相対角であり、中間のジンバルが－90度回転した位置と＋90度回転した位置に特異点がある。中間ジンバルがこの特異点の位置に来た状態をジンバル・ロックと呼び、3つのジンバル軸が同一平面に並んで、自由度が一つ無くなっている。
オイラー角	4ジンバル オイラー角	4	無し	3ジンバル機構におけるジンバル・ロックを無くすため、もう1つのジンバルを追加して4ジンバル機構としたものである。最外ジンバルを除いた内側3ジンバルにおいてジンバル・ロックが発生する状態になると、最外ジンバルが急速に180度反転してジンバル・ロックの発生を回避する。この最外ジンバルの180度反転はジンバルフリップと呼ばれる。 3.3項に示したH-Iロケット用プラットフォーム型慣性センサ・ユニットで採用された。
四元数とその仲間たち	クォータニオン （オイラー・ パラメータ）	4	無し	姿勢の回転はオイラー軸ベクトルとその回りの回転角を用いて、1つのスカラー量と1つのベクトル量より成る数として表すことができるので、四元数（クォータニオン）という超複素数の実数部にスカラー量を、3種の虚数単位から成る虚数部にベクトル量を対比させ、その四元数の4つの実係数を求める方法である。
四元数とその仲間たち	ギブス・ベクター （ロドリゲス・ パラメータ）	3	有り	四元数の実数部が常に1となるように変形した方法で、オイラー軸回りの回転角が±180度の位置に特異点がある。宇宙科学研究所のM-ⅢS2型ロケットの姿勢基準装置に採用され、J-Iロケットではそれを引き継いで使用した。
四元数とその仲間たち	ケーリー・クライン （ケーリー数）	4 （複素数）	無し	2行2列のマトリクスの4つの要素を複素数としたもので、4つの複素数の実係数は4種類で表し、四元数の実係数に対応している。計算は複素数演算で行う。

2.2 姿勢の回転の表現

2.2.1 オイラー軸

任意の座標系を(o−e, f, g)としたとき、任意のベクトル $\mathbf{a}$ は次のように表される。

$$\mathbf{a}=(\mathbf{a}\cdot\underline{e})\underline{e}+(\mathbf{a}\cdot\underline{f})\underline{f}+(\mathbf{a}\cdot\underline{g})\underline{g}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{f}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{g}\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.1\text{-}1)$$

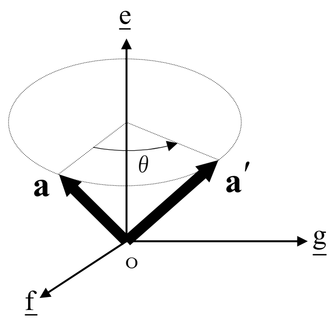


図2.2−1 姿勢の回転

このベクトルを$\underline{e}$軸回りに角度 θ だけ回転して得られるベクトルは次のように表される。

$$\mathbf{a}'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{f}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{g}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\0\\0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{a}\cdot\underline{f}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{g}\end{pmatrix}+\sin\theta\begin{pmatrix}0\\ -\mathbf{a}\cdot\underline{g}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{f}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\0\\0\end{pmatrix}+\cos\theta\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{f}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{g}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\0\\0\end{pmatrix}\right\}+\sin\theta\left\{\underline{e}\times\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\underline{e}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{f}\\ \mathbf{a}\cdot\underline{g}\end{pmatrix}\right\}$$

$$=(\mathbf{a}\cdot\underline{e})\underline{e}+\cos\theta\{\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\underline{e})\underline{e}\}+\sin\theta(\underline{e}\times\mathbf{a}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.1\text{-}2)$$

ここで、ベクトル3重積 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ を変形して、$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ より

$(\mathbf{a}\cdot\underline{e})\underline{e}=(\underline{e}\cdot\underline{e})\mathbf{a}-\underline{e}\times(\mathbf{a}\times\underline{e})=(\underline{e}\cdot\underline{e})\mathbf{a}+\underline{e}\times(\underline{e}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}+[\underline{e}\times]^2\cdot\mathbf{a}$ であるから

$$\mathbf{a}'=\mathbf{a}+[\underline{e}\times]^2\cdot\mathbf{a}+\cos\theta\left\{\mathbf{a}-\mathbf{a}-[\underline{e}\times]^2\cdot\mathbf{a}\right\}+\sin\theta[\underline{e}\times]\cdot\mathbf{a}$$

$$=\mathbf{a}+(1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\cdot\mathbf{a}+\sin\theta[\underline{e}\times]\cdot\mathbf{a}$$

$$=\left\{\mathbf{1}+\sin\theta[\underline{e}\times]+(1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot\mathbf{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.1\text{-}3)$$

ここで、$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$:単位マトリクス

$\underline{e}=\begin{pmatrix}e_x\\e_y\\e_z\end{pmatrix}$:回転軸ベクトル

$[\underline{e}\times]=\begin{pmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{pmatrix}$:スキューシンメトリックマトリクス

$$[\underline{e}\times]^2=\begin{pmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e_y^2-e_z^2&e_ye_x&e_ze_x\\e_xe_y&-e_z^2-e_x^2&e_ze_y\\e_xe_z&e_ye_z&-e_x^2-e_y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_x^2-1&e_ye_x&e_ze_x\\e_xe_y&e_y^2-1&e_ze_y\\e_xe_z&e_ye_z&e_z^2-1\end{pmatrix}$$

このベクトル$\underline{e}$は次の条件を見たすベクトルで、a－a’面の2等分線を含むa－a’面に垂直な面内にある。

$$\underline{e}\cdot\mathbf{a}=\underline{e}\cdot\mathbf{a}' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2.1\text{-}4)$$

次に、基準座標系$(\underline{x}\quad\underline{y}\quad\underline{z})$を$\underline{e}$軸周りに角度 θ だけ回転して得られる回転座標系を$(\underline{x}_B\quad\underline{y}_B\quad\underline{z}_B)$とし、上記(2.2.1−4)式のa及びa’に順次代入すると次式が得られる。

$\underline{e}\cdot\underline{x}=\underline{e}\cdot\underline{x}_B$、 $\underline{e}\cdot\underline{y}=\underline{e}\cdot\underline{y}_B$、 $\underline{e}\cdot\underline{z}=\underline{e}\cdot\underline{z}_B$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥ (2.2.1-5)

よって、e軸は基準座標系から見ても回転座標系から見ても同じに見えるベクトルである。この式を変形して

$\underline{e}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_B)=0$、 $\underline{e}\cdot(\underline{y}-\underline{y}_B)=0$、 $\underline{e}\cdot(\underline{z}-\underline{z}_B)=0$ ‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥‥ (2.2.1-6)

従って、$\underline{e}$軸は$(\underline{x}-\underline{x}_B)$、$(\underline{y}-\underline{y}_B)$、$(\underline{z}-\underline{z}_B)$に垂直なベクトルであるから、次式で示される。

$$\mathbf{e}=(\underline{x}-\underline{x}_B)\times(\underline{y}-\underline{y}_B)+(\underline{y}-\underline{y}_B)\times(\underline{z}-\underline{z}_B)+(\underline{z}-\underline{z}_B)\times(\underline{x}-\underline{x}_B) \quad \cdots\cdots (2.2.1\text{-}7)$$

$$\underline{e}=\frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} \quad \cdots\cdots (2.2.1\text{-}8)$$

ゆえに、(2.2.1-5)式を同時に満たす$\underline{e}$軸は基準座標系と回転座標系が等しくないときには必ず存在し、これをオイラー軸と呼び、その周りの回転角とで回転体の3軸周りの回転を表現する。

2.2.2 オイラー軸とその周りの回転角

基準座標系Iを$(\underline{x}\quad\underline{y}\quad\underline{z})$とし、その座標系をベクトル$\underline{e}$周りに角度$\theta$だけ回転して得られる回転座標系Bを$(\underline{x}_B\quad\underline{y}_B\quad\underline{z}_B)$としたとき、(2.2.1-3)式の**a**及び**a'**にそれぞれの座標軸ベクトルを順次代入すると、基底の座標系から見たときの基準座標系Iから回転座標系Bまでの回転を表すマトリクスが、次式のように得られる。

$$(\underline{x}_B\quad\underline{y}_B\quad\underline{z}_B)=\left\{\mathbf{1}+\sin\theta[\underline{e}\times]+(1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot(\underline{x}\quad\underline{y}\quad\underline{z}) \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}1)$$

上記は1.2-(3)項に示した回転を表すマトリクスで、単純な方向余弦マトリクスと異なるが、ここで基準座標系Iを基底の座標系に採れば、その座標系を表すマトリクス$(\underline{x}\quad\underline{y}\quad\underline{z})$は単位マトリクス[1]となるので、それを省略して表記すれば

$$\mathbf{D}_B^I\equiv(\underline{x}_B\quad\underline{y}_B\quad\underline{z}_B)=\left\{\mathbf{1}+\sin\theta[\underline{e}\times]+(1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1+(1-c)(e_x{}^2-1) & (1-c)e_ye_x-se_z & (1-c)e_ze_x+se_y\\(1-c)e_xe_y+se_z & 1+(1-c)(e_y{}^2-1) & (1-c)e_ze_y-se_x\\(1-c)e_xe_z-se_y & (1-c)e_ye_z+se_x & 1+(1-c)(e_z{}^2-1)\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}2)$$

ここで、D_B^I :座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクス

$$\begin{aligned}\underline{e}&=e_x\underline{x}+e_y\underline{y}+e_z\underline{z}\\&=e_x\underline{x}_B+e_y\underline{y}_B+e_z\underline{z}_B \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}3)\\&=\underline{e}_B\\&=\begin{pmatrix}e_x\\e_y\\e_z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

:オイラー軸

θ :オイラー軸周りの回転角

s=sin(θ)

c=cos(θ)

次に、基準座標系に対する回転座標系の回転角速度を次のように表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B=\omega_{x_B}\underline{x}_B+\omega_{y_B}\underline{y}_B+\omega_{z_B}\underline{z}_B \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}4)$$

オイラー軸(2.2.2-3)式は方向余弦マトリクス(2.2.2-2)式を用いて次のように表されるから

$$\underline{e} = \mathbf{D}_B^I \cdot \underline{e}_B \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}5)$$

これを微分して

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\mathbf{D}}_B^I \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot [\boldsymbol{\omega}_B \times] \cdot \underline{e}_B + \mathbf{D}_B^I \cdot \dot{\underline{e}}_B = \mathbf{D}_B^I \cdot (\boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e}_B + \dot{\underline{e}}_B) \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}6)$$

ここで、$\underline{e} = \underline{e}_B$ であるから上式を変形すると

$$\left(\mathbf{D}_B^I\right)^T \dot{\underline{e}} = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e} + \dot{\underline{e}}$$

$$\left(\mathbf{D}_B^I\right)^T \dot{\underline{e}} - \dot{\underline{e}} = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{e}$$

$$\left(\mathbf{1} - \mathbf{D}_B^I\right)^T \dot{\underline{e}} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$ これに(2.2.2-2)式を代入し

$$\left(\mathbf{1} - \left\{\mathbf{1} + \sin\theta[\underline{e}\times] + (1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right\}\right)^T \dot{\underline{e}} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$

$$\left(-\sin\theta[\underline{e}\times] - (1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right)^T \dot{\underline{e}} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$

$$\left(\sin\theta[\underline{e}\times] - (1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right)\dot{\underline{e}} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$

$$\sin\theta(\underline{e}\times\dot{\underline{e}}) - (1-\cos\theta)\underline{e}\times(\underline{e}\times\dot{\underline{e}}) = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$ ベクトル3重積 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ より

$$\sin\theta(\underline{e}\times\dot{\underline{e}}) - (1-\cos\theta)\left\{(\underline{e}\cdot\dot{\underline{e}})\underline{e} - (\underline{e}\cdot\underline{e})\dot{\underline{e}}\right\} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$ $\underline{e}\cdot\dot{\underline{e}} = 0$、$\underline{e}\cdot\underline{e} = 1$ より

$$\sin\theta(\underline{e}\times\dot{\underline{e}}) + (1-\cos\theta)\dot{\underline{e}} = \underline{e} \times \boldsymbol{\omega}_B$$

$$\left\{(1-\cos\theta)\mathbf{1} + \sin\theta[\underline{e}\times]\right\}\dot{\underline{e}} = [\underline{e}\times]\boldsymbol{\omega}_B$$

$$\dot{\underline{e}} = \left\{(1-\cos\theta)\mathbf{1} + \sin\theta[\underline{e}\times]\right\}^{-1}[\underline{e}\times]\boldsymbol{\omega}_B$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta e_z & \sin\theta e_y \\ \sin\theta e_z & 1-\cos\theta & -\sin\theta e_x \\ -\sin\theta e_y & \sin\theta e_x & 1-\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \cdot [\underline{e}\times] \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$ ここで、s＝sin θ、c＝cos θ とおいて

$$= \frac{1}{2(1-c)^2} \begin{pmatrix} (1-c)^2 + s^2 e_x{}^2 & s^2 e_x e_y + s(1-c)e_z & s^2 e_x e_z - s(1-c)e_y \\ s^2 e_x e_y - s(1-c)e_z & (1-c)^2 + s^2 e_y{}^2 & s^2 e_y e_z + s(1-c)e_x \\ s^2 e_x e_z + s(1-c)e_y & s^2 e_y e_z - s(1-c)e_x & (1-c)^2 + s^2 e_z{}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$

$$= \frac{1}{2(1-c)^2} \begin{pmatrix} s(1-c)(e_y{}^2 + e_z{}^2) & -s(1-c)e_x e_y - (1-c)^2 e_z & -s(1-c)e_x e_z + (1-c)^2 e_y \\ -s(1-c)e_x e_y + (1-c)^2 e_z & s(1-c)(e_z{}^2 + e_x{}^2) & -s(1-c)e_y e_z - (1-c)^2 e_x \\ -s(1-c)e_x e_z - (1-c)^2 e_y & -s(1-c)e_y e_z + (1-c)^2 e_x & s(1-c)(e_x{}^2 + e_y{}^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$

$$= \frac{1}{2(1-c)} \begin{pmatrix} s(1-e_x{}^2) & -s e_x e_y - (1-c)e_z & -s e_x e_z + (1-c)e_y \\ -s e_x e_y + (1-c)e_z & s(1-e_y{}^2) & -s e_y e_z - (1-c)e_x \\ -s e_x e_z - (1-c)e_y & -s e_y e_z + (1-c)e_x & s(1-e_z{}^2) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$

$$= \frac{1}{2(1-c)}\left\{(1-c)[\underline{e}\times] - s[\underline{e}\times]^2\right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\underline{e}\times] - \left(\frac{s}{1-c}\right)[\underline{e}\times]^2\right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$

ここで $\dfrac{s}{1-c} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\dfrac{\theta}{2}$ より

$$\dot{\underline{e}} = \frac{1}{2}\left\{[\underline{e}\times] - \cot\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot\boldsymbol{\omega}_B \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}7)$$

また、オイラー軸周りの回転角の微係数は、オイラー軸の定義より下記で表される。

$$\dot{\theta} = \boldsymbol{\omega}_B \cdot \underline{e} \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}8)$$

上記の(2.2.2-7)式は $\theta=0$ に特異点を持ち、その時のオイラー軸とその周りの回転角並びにその微係数は下記と見なすことができる。

$$\underline{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}_B}{|\boldsymbol{\omega}_B|}、\quad \theta = 0、\quad \dot{\underline{e}} = \mathbf{0}、\quad \dot{\theta} = |\boldsymbol{\omega}_B| \quad \cdots\cdots (2.2.2\text{-}9)$$

2.2.3 回転角ベクトル

上記のオイラー軸とその周りの回転角を用いて、下記のベクトルを定義することができる。ここではこれを回転角ベクトルと呼ぶこととする。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix}\theta_x\\ \theta_y\\ \theta_z\end{pmatrix} = \theta\underline{e} \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}1)$$

ここで、e :オイラー軸ベクトル

θ :オイラー軸周りの回転角

オイラー軸ベクトルは、上記の回転角ベクトルを用いて下記のように表すことができる。

$$\underline{e} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}2)$$

これを(2.2.2-2)式に代入すると、回転角ベクトルによって座標系の方向余弦マトリクスを表すことができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_B^I &\equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33}\end{pmatrix} = \left\{\mathbf{1} + \sin\theta[\underline{e}\times] + (1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right\} = \left\{\mathbf{1} + \frac{\sin\theta}{\theta}[\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}\times]^2\right\}\\
&= \begin{pmatrix}
1+\frac{1-c}{\theta^2}\left(\theta_x{}^2-\theta^2\right) & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_x - \frac{s}{\theta}\theta_z & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_x + \frac{s}{\theta}\theta_y\\
\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_y + \frac{s}{\theta}\theta_z & 1+\frac{1-c}{\theta^2}\left(\theta_y{}^2-\theta^2\right) & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_y - \frac{s}{\theta}\theta_x\\
\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_z - \frac{s}{\theta}\theta_y & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_z + \frac{s}{\theta}\theta_x & 1+\frac{1-c}{\theta^2}\left(\theta_z{}^2-\theta^2\right)
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
1-\frac{1-c}{\theta^2}\left(\theta_y{}^2+\theta_z{}^2\right) & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_x - \frac{s}{\theta}\theta_z & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_x + \frac{s}{\theta}\theta_y\\
\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_y + \frac{s}{\theta}\theta_z & 1-\frac{1-c}{\theta^2}\left(\theta_z{}^2+\theta_x{}^2\right) & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_y - \frac{s}{\theta}\theta_x\\
\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_z - \frac{s}{\theta}\theta_y & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_z + \frac{s}{\theta}\theta_x & 1-\frac{1-c}{\theta^2}\left(\theta_x{}^2+\theta_y{}^2\right)
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
c+\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x{}^2 & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_x - \frac{s}{\theta}\theta_z & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_x + \frac{s}{\theta}\theta_y\\
\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_y + \frac{s}{\theta}\theta_z & c+\frac{1-c}{\theta^2}\theta_y{}^2 & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_z\theta_y - \frac{s}{\theta}\theta_x\\
\frac{1-c}{\theta^2}\theta_x\theta_z - \frac{s}{\theta}\theta_y & \frac{1-c}{\theta^2}\theta_y\theta_z + \frac{s}{\theta}\theta_x & c+\frac{1-c}{\theta^2}\theta_z{}^2
\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}3)
\end{aligned}$$

上記から、方向余弦と回転角ベクトルの関係が次式で表すことができる。

$$\cos\theta = \frac{d_{11}+d_{22}+d_{33}-1}{2} \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}4)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(d_{32}-d_{23})^2+(d_{13}-d_{31})^2+(d_{21}-d_{12})^2}}{2} \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}5)$$

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix}\theta_x\\ \theta_y\\ \theta_z\end{pmatrix} = \frac{\theta}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} d_{32}-d_{23}\\ d_{13}-d_{31}\\ d_{21}-d_{12}\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}6)$$

回転角ベクトル(2.2.3-1)式の微分は、(2.2.2-7)式及び(2.2.2-8)式を代入して

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta}\underline{e} + \theta\dot{\underline{e}}$$

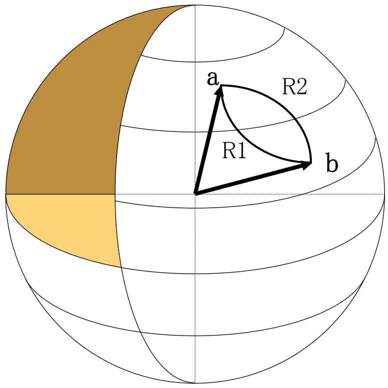
$$= (\boldsymbol{\omega}_B\cdot\underline{e})\underline{e} + \theta\left\{\frac{1}{2}\left([\underline{e}\times] - \cot\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]^2\right)\cdot\boldsymbol{\omega}_B\right\}$$

右辺第1項にベクトル3重積 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}$ を適用して

$$= (\underline{e}\cdot\underline{e})\boldsymbol{\omega}_B - \underline{e}\times(\boldsymbol{\omega}_B\times\underline{e}) + \frac{\theta}{2}\left(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B - \cot\frac{\theta}{2}\underline{e}\times(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B)\right)$$

$$= \boldsymbol{\omega}_B + \underline{e}\times(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B) + \frac{\theta}{2}\left(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B - \cot\frac{\theta}{2}\underline{e}\times(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B)\right)$$

$$= \boldsymbol{\omega}_B + \frac{\theta}{2}(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B) + \left(1-\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\{\underline{e}\times(\underline{e}\times\boldsymbol{\omega}_B)\}$$



ここでオイラー軸を回転角ベクトルに直すと下記のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_B + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_B) + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\{\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_B)\}$$

$$= \boldsymbol{\omega}_B + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_B) + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)\{\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_B)\}$$

$$= \left\{\mathbf{1} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)[\boldsymbol{\theta}\times]^2\right\}\cdot\boldsymbol{\omega}_B \quad \cdots\cdots (2.2.3\text{-}7)$$

上記の右辺第2項以降は Non Commutativity Rate と呼ばれ、回転座標系での回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_B$ が回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と並行でない(両ベクトルの外積がゼロでない)ときに発生するので、回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の初期値が異なると回転角速度 $\boldsymbol{\omega}_B$ が同じでも上記(2.2.3-7)式の積分は異なる結果となる。従って、(2.2.3-7)式は過去の回転の結果が現在の回転に影響を与えるため、回転の時間的順序が変更できないことを意味しており、上図のベクトルaを経路R1を通ってベクトルbへ回転させ、さらに経路R2を通ってベクトルaへ戻った場合と、逆に経路R2から経路R1の順に通ってベクトルaへ戻った場合とでは、ベクトルa周りの回転が異なることを意味している。

2.2.4 コーニング運動

基準座標系Iを(o－x, y, z)として回転座標系Bを(o－x_B, y_B, z_B)としたとき、基準座標系から見た回転座標系の回転は(2.2.3-7)式の回転角ベクトルで表されるから、この式から逆に回転座標系の各軸周りの回転角速度を求めると下記で表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \left\{\mathbf{1} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)[\boldsymbol{\theta}\times]^2\right\}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

$$=\dot{\boldsymbol{\theta}}-\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\times\dot{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{\theta}\times\left(\boldsymbol{\theta}\times\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$$=\left\{\mathbf{1}-\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\times\right]+\frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\times\right]^2\right\}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.4\text{-}1)$$

ここで、$\boldsymbol{\omega}_B=\omega_{x_B}\underline{x}_B+\omega_{y_B}\underline{y}_B+\omega_{z_B}\underline{z}_B$

基準座標系に対して回転座標系が下記で定義されるコーニング運動を行っているとすると

$$\boldsymbol{\theta}=\theta_y\underline{y}+\theta_z\underline{z}=\theta\sin\Omega t\underline{y}+\theta\cos\Omega t\underline{z}=\theta\begin{pmatrix}0\\ \sin\Omega t\\ \cos\Omega t\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.4\text{-}2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\theta}_y\underline{y}+\dot{\theta}_z\underline{z}=\theta\Omega\cos\Omega t\underline{y}-\theta\Omega\sin\Omega t\underline{z}=\theta\Omega\begin{pmatrix}0\\ \cos\Omega t\\ -\sin\Omega t\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.4\text{-}3)$$

ここで、θ :コーニング半頂角

Ω :コーニング角速度

回転座標系の各軸周りの回転角速度は(2.2.4-1)式に(2.2.4-2)式及び(2.2.4-3)式を代入して下記で表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B=\theta\Omega\begin{pmatrix}0\\ \cos\Omega t\\ -\sin\Omega t\end{pmatrix}-\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\begin{pmatrix}-\theta^2\Omega\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\begin{pmatrix}0\\ -\theta^3\Omega\cos\Omega t\\ \theta^3\Omega\sin\Omega t\end{pmatrix}$$

$$=\Omega\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ \sin\theta\cos\Omega t\\ -\sin\theta\sin\Omega t\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.4\text{-}4)$$

従って、回転座標系x_B軸周りには回転を与えていないのに下記で示される一定の角速度が発生する。

$$\omega_{x_B}=\Omega\left(1-\cos\theta\right)\fallingdotseq\frac{1}{2}\theta^2\Omega \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.4\text{-}5)$$

これはコーニングドリフトと呼ばれ、サーボテーブルにジャイロを搭載し、右図のようにサーボテーブルの2軸に(2.2.4-2)式の角振動を与えると、そのジャイロは(2.2.4-4)式の角速度を検知して出力することとなる。

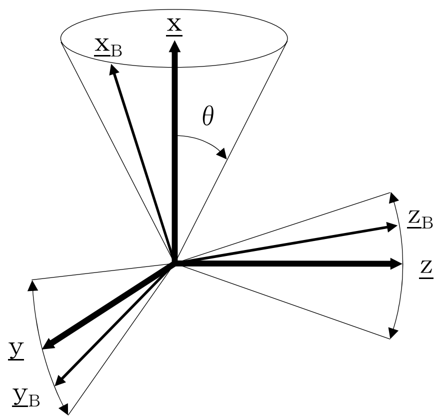


図2.2-2　コーニング運動

上記の(2.2.4-5)式によれば、コーニングドリフトは図2.2.4-1に示した単位ベクトル$\underline{x}_B$軸の先端が描く面積($\pi\theta^2$)に比例することが分かる。

2.3 姿勢の計算法

2.3.1 方向余弦マトリクス法

(1) 方向余弦マトリクスの微係数

基準座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)とし、座標系Iを基底の座標系としたとき、座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクスは4.1項に示したように、下記で表される。

$$\mathbf{D}_B^I = \left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)^T \cdot \left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right) = \left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \cdots\cdots (2.3.1\text{-}1)$$

また、基準座標系に対する回転座標系の回転角速度は次式で表される。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B}\underline{x}_B + \omega_{y_B}\underline{y}_B + \omega_{z_B}\underline{z}_B \cdots\cdots (2.3.1\text{-}2)$$

このとき、回転座標系の各軸ベクトルの微係数は、コリオリの法則より、次式で表される。ここで、回転座標系から見た回転座標系軸ベクトルの微係数はゼロである。

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{x}_B + \left(\dot{\underline{x}}_B\right)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{x}_B = \omega_{z_B}\underline{y}_B - \omega_{y_B}\underline{z}_B \\ \dot{\underline{y}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{y}_B + \left(\dot{\underline{y}}_B\right)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{y}_B = \omega_{x_B}\underline{z}_B - \omega_{z_B}\underline{x}_B \\ \dot{\underline{z}}_B &= \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{z}_B + \left(\dot{\underline{z}}_B\right)^B = \boldsymbol{\omega}_B \times \underline{z}_B = \omega_{y_B}\underline{x}_B - \omega_{x_B}\underline{y}_B \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.3.1\text{-}3)$$

これらをまとめると、方向余弦マトリクスの微係数は下記のように表される。

$$\left(\dot{\underline{x}}_B \quad \dot{\underline{y}}_B \quad \dot{\underline{z}}_B\right) = \left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_B} & \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} & 0 & -\omega_{x_B} \\ -\omega_{y_B} & \omega_{x_B} & 0 \end{pmatrix} = \left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_B \times\right]$$

$$\dot{\mathbf{D}}_B^I = \mathbf{D}_B^I \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_B \times\right] \cdots\cdots (2.3.1\text{-}4)$$

(2) 角度増分に基づく方向余弦マトリクスの更新

一般に、微分可能な関数は、次のようなテーラー級数に展開できる。

$$f_{(x)} = f_{(x-h)} + hf'_{(x-h)} + \frac{h^2}{2!}f''_{(x-h)} + \frac{h^3}{3!}f'''_{(x-h)} + \cdots\cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}_{(x-h)} \cdots\cdots (2.3.1\text{-}5)$$

また、方向余弦マトリクスのn次微分は、(2.3.1-4)式より次のように表される。

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{D}_B^I\right) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\mathbf{D}_B^I\right) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_B \times\right] = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}\left(\mathbf{D}_B^I\right) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_B \times\right]^2 = \cdots\cdots = \mathbf{D}_B^I \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_B \times\right]^n \cdots\cdots (2.3.1\text{-}6)$$

よって、微小時間をΔT、現時点をk、現時点よりΔT前の時点をk－1としたとき、方向余弦マトリクスは次のテーラー級数で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{B,k}^I &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I + \Delta T\dot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \frac{\Delta T^2}{2!}\ddot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \frac{\Delta T^3}{3!}\dddot{\mathbf{D}}_{B,k-1}^I + \cdots\cdots + \frac{\Delta T^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{D}_B^I\right)_{k-1} + \cdots\cdots \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I + \Delta T\mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right] + \frac{\Delta T^2}{2!}\mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right]^2 + \cdots\cdots + \frac{\Delta T^n}{n!}\mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right]^n + \cdots\cdots \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot \left(\mathbf{1} + \Delta T\left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right] + \frac{\Delta T^2}{2!}\left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right]^2 + \cdots\cdots + \frac{\Delta T^n}{n!}\left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right]^n + \cdots\cdots\right) \\ &= \mathbf{D}_{B,k-1}^I \cdot e^{\Delta T\left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right]} \cdots\cdots (2.3.1\text{-}7) \end{aligned}$$

ここでマトリクス指数関数 $e^{\Delta T\left[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1} \times\right]}$ は推移マトリクスと呼ばれ、k－1時点からk時点までのΔT間の推移を表している。

座標系を順番に回転させて得られる方向余弦マトリクスは、1.2項に示したように、次のように表される。

$$\mathbf{D}_{B,k}^{I} = \mathbf{D}_{B,k-1}^{I} \cdot \mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1} \quad \cdots\cdots (2.3.1\text{-}8)$$

ここで $\mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1}$ は（2.3.1-7）式と同じで、k－1時点からk時点までのΔT間の回転座標系Bの回転を表しており、その回転角ベクトルは次式で表される。

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \Delta\theta_{\mathbf{x}} \\ \Delta\theta_{\mathbf{y}} \\ \Delta\theta_{\mathbf{z}} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.3.1\text{-}9)$$

また、$\mathbf{D}_{B,k}^{B,k-1}$ は座標系（B,k-1）を基底の座標系としたときの方向余弦マトリクスであって、上記の回転角ベクトルで（2.2.3-3）式のように表されるので、回転後の方向余弦マトリクスは下記となる。

$$\mathbf{D}_{B,k}^{I} = \mathbf{D}_{B,k-1}^{I} \cdot \begin{pmatrix} 1-\frac{1-c}{\Delta\theta^2}\left(\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2\right) & \frac{1-c}{\Delta\theta^2}\Delta\theta_y\Delta\theta_x-\frac{s}{\Delta\theta}\Delta\theta_z & \frac{1-c}{\Delta\theta^2}\Delta\theta_z\Delta\theta_x+\frac{s}{\Delta\theta}\Delta\theta_y \\ \frac{1-c}{\Delta\theta^2}\Delta\theta_x\Delta\theta_y+\frac{s}{\Delta\theta}\Delta\theta_z & 1-\frac{1-c}{\Delta\theta^2}\left(\Delta\theta_z{}^2+\Delta\theta_x{}^2\right) & \frac{1-c}{\Delta\theta^2}\Delta\theta_z\Delta\theta_y-\frac{s}{\Delta\theta}\Delta\theta_x \\ \frac{1-c}{\Delta\theta^2}\Delta\theta_x\Delta\theta_z-\frac{s}{\Delta\theta}\Delta\theta_y & \frac{1-c}{\Delta\theta^2}\Delta\theta_y\Delta\theta_z+\frac{s}{\Delta\theta}\Delta\theta_x & 1-\frac{1-c}{\Delta\theta^2}\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{D}_{B,k-1}^{I} \cdot \begin{pmatrix} 1-c_n\left(\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2\right) & c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_x-s_n\Delta\theta_z & c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_x+s_n\Delta\theta_y \\ c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_y+s_n\Delta\theta_z & 1-c_n\left(\Delta\theta_z{}^2+\Delta\theta_x{}^2\right) & c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_y-s_n\Delta\theta_x \\ c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_z-s_n\Delta\theta_y & c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_z+s_n\Delta\theta_x & 1-c_n\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2\right) \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.3.1\text{-}10)$$

ここで、$\Delta\theta = \left|\Delta\boldsymbol{\theta}\right| = \sqrt{\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2}$

$$s_n = \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \quad \cdots\cdots (2.3.1\text{-}11)$$

$$c_n = \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2} \quad \cdots\cdots (2.3.1\text{-}12)$$

2.3.2 オイラー角法

オイラー角による姿勢計算は、一般には3ジンバルオイラー角が用いられる。4ジンバルオイラー角については、H-Iロケット航法システムの解説において概要を説明する。

(1) 方向余弦マトリクスとオイラー角

基準座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、座標系Iをx軸周りに角度θ_1回転させ、新しくできた座標系(o-x, y', z')のy'軸周りに角度θ_2回転させ、さらに新しくできた座標系(o-x''', y', z'')のz''軸周りに角度θ_3回転させてできた座標系を座標系Bとすると、座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクスは1.2項に示したように、下記で表される。

$$\begin{pmatrix}\underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{x} & \underline{y} & \underline{z}\end{pmatrix}\cdot[\theta_1]_1\cdot[\theta_2]_2\cdot[\theta_3]_3 \quad \cdots(2.3.2\text{-}1)$$

$$\mathbf{D}_B^I \equiv \begin{pmatrix}\underline{x} & \underline{y} & \underline{z}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B\end{pmatrix} = [\theta_1]_1\cdot[\theta_2]_2\cdot[\theta_3]_3 \quad \cdots\cdots(2.3.2\text{-}2)$$

このように、2つの座標系の関係を3回の回転で表したとき、この3つの角度はオイラー角と呼ばれる。

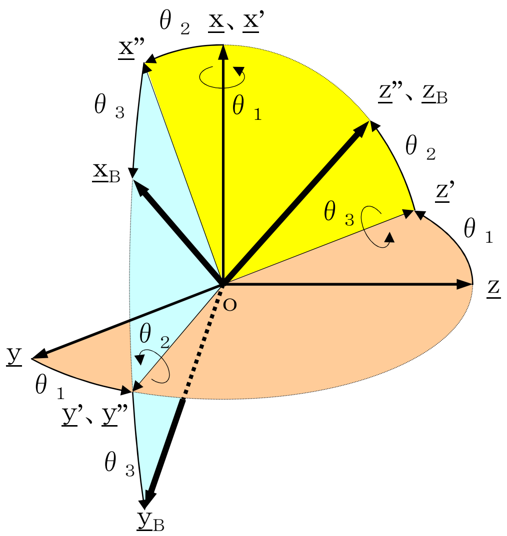


図2.3-1　オイラー角

上記の回転の順序は任意に選べるから、一般的には方向余弦マトリクスはオイラー角を用いて下記で表される。

$$\mathbf{D}_B^I \equiv \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k \quad \cdots\cdots(2.3.2\text{-}3)$$

ここでi、j、kは何番目の座標軸で回転させるかを表し、それぞれ1、2、3の何れかを示す。
それらの組み合わせは、隣同士が異なるものが3×2×2=12通りあり、(2.3.2-3)式を展開するとオイラー角から方向余弦マトリクスへの変換式が得られ、それらを表2.3-1に示す。

また、逆方向に、方向余弦からオイラー角への変換は、表2.3-1の方向余弦マトリクスから、表2.3-2のように求められる。

同様に、座標軸ベクトルを用いてオイラー角へ変換する式は、下記の式と表2.3-2を比較して表2.3-3のように求められる。

$$\mathbf{D}_B^I \equiv \begin{pmatrix}\underline{x} & \underline{y} & \underline{z}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B\cdot\underline{x} & \underline{y}_B\cdot\underline{x} & \underline{z}_B\cdot\underline{x} \\ \underline{x}_B\cdot\underline{y} & \underline{y}_B\cdot\underline{y} & \underline{z}_B\cdot\underline{y} \\ \underline{x}_B\cdot\underline{z} & \underline{y}_B\cdot\underline{z} & \underline{z}_B\cdot\underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2.3.2\text{-}4)$$

表2.3-1　オイラー角から方向余弦マトリクスへの変換

No.	i、j、k	方向余弦マトリクス		
1	1、2、3	$c\theta_2 c\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$	$s\theta_2$
		$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2$
		$-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 c\theta_2$
2	2、3、1	$c\theta_1 c\theta_2$	$-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$
		$s\theta_2$	$c\theta_2 c\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$
		$-s\theta_1 c\theta_2$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
3	3、1、2	$-s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$-c\theta_2 s\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$
		$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 c\theta_2$	$-c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$
		$-c\theta_2 s\theta_3$	$s\theta_2$	$c\theta_2 c\theta_3$
4	3、2、1	$c\theta_1 c\theta_2$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$
		$s\theta_1 c\theta_2$	$s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$
		$-s\theta_2$	$c\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_2 c\theta_3$
5	1、3、2	$c\theta_2 c\theta_3$	$-s\theta_2$	$c\theta_2 s\theta_3$
		$c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$c\theta_1 c\theta_2$	$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$
		$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_1 c\theta_2$	$s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
6	2、1、3	$s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_1 c\theta_2$
		$c\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_2 c\theta_3$	$-s\theta_2$
		$c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3$	$c\theta_1 c\theta_2$
7	1、2、1	$c\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3$	$s\theta_2 c\theta_3$
		$s\theta_1 s\theta_2$	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$
		$-c\theta_1 s\theta_2$	$c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$
8	2、3、2	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_1 s\theta_2$	$c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$
		$s\theta_2 c\theta_3$	$c\theta_2$	$s\theta_2 s\theta_3$
		$-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
9	3、1、3	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$
		$c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_1 s\theta_2$
		$s\theta_2 s\theta_3$	$s\theta_2 c\theta_3$	$c\theta_2$
10	3、2、3	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2$
		$s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$
		$-s\theta_2 c\theta_3$	$s\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_2$
11	1、3、1	$c\theta_2$	$-s\theta_2 c\theta_3$	$s\theta_2 s\theta_3$
		$c\theta_1 s\theta_2$	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$	$-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$
		$s\theta_1 s\theta_2$	$s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$
12	2、1、2	$-s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3$	$s\theta_1 s\theta_2$	$s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3$
		$s\theta_2 s\theta_3$	$c\theta_2$	$-s\theta_2 c\theta_3$
		$-c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3$	$c\theta_1 s\theta_2$	$c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3$

(注)$s\theta_n = \sin\theta_n$、$c\theta_n = \cos\theta_n$ であり、n は何回目の回転角かを示す。

表2.3-2　方向余弦からオイラー角への変換

No.	i、j、k	オイラー角		
		θ_1	θ_2	θ_3
1	1、2、3	$\tan^{-1}(-d_{23}／d_{33})$	$\sin^{-1}(d_{13})$	$\tan^{-1}(-d_{12}／d_{11})$
2	2、3、1	$\tan^{-1}(-d_{31}／d_{11})$	$\sin^{-1}(d_{21})$	$\tan^{-1}(-d_{23}／d_{22})$
3	3、1、2	$\tan^{-1}(-d_{12}／d_{22})$	$\sin^{-1}(d_{32})$	$\tan^{-1}(-d_{31}／d_{33})$
4	3、2、1	$\tan^{-1}(d_{21}／d_{11})$	$\sin^{-1}(-d_{31})$	$\tan^{-1}(d_{32}／d_{33})$
5	1、3、2	$\tan^{-1}(d_{32}／d_{22})$	$\sin^{-1}(-d_{12})$	$\tan^{-1}(d_{13}／d_{11})$
6	2、1、3	$\tan^{-1}(d_{13}／d_{33})$	$\sin^{-1}(-d_{23})$	$\tan^{-1}(d_{21}／d_{22})$
7	1、2、1	$\tan^{-1}(d_{21}／-d_{31})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{12}／d_{13})$
8	2、3、2	$\tan^{-1}(d_{32}／-d_{12})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{23}／d_{21})$
9	3、1、3	$\tan^{-1}(d_{13}／-d_{23})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{31}／d_{32})$
10	3、2、3	$\tan^{-1}(d_{23}／d_{13})$	$\cos^{-1}(d_{33})$	$\tan^{-1}(d_{32}／-d_{31})$
11	1、3、1	$\tan^{-1}(d_{31}／d_{21})$	$\cos^{-1}(d_{11})$	$\tan^{-1}(d_{13}／-d_{12})$
12	2、1、2	$\tan^{-1}(d_{12}／d_{32})$	$\cos^{-1}(d_{22})$	$\tan^{-1}(d_{21}／-d_{23})$

表2.3-3　座標軸ベクトルからオイラー角への変換

No.	i、j、k	オイラー角		
		θ_1	θ_2	θ_3
1	1、2、3	$\tan^{-1}(-\underline{z}_B\cdot\underline{y}／\underline{z}_B\cdot\underline{z})$	$\sin^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{x})$	$\tan^{-1}(-\underline{y}_B\cdot\underline{x}／\underline{x}_B\cdot\underline{x})$
2	2、3、1	$\tan^{-1}(-\underline{x}_B\cdot\underline{z}／\underline{x}_B\cdot\underline{x})$	$\sin^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{y})$	$\tan^{-1}(-\underline{z}_B\cdot\underline{y}／\underline{y}_B\cdot\underline{y})$
3	3、1、2	$\tan^{-1}(-\underline{y}_B\cdot\underline{x}／\underline{y}_B\cdot\underline{y})$	$\sin^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{z})$	$\tan^{-1}(-\underline{x}_B\cdot\underline{z}／\underline{z}_B\cdot\underline{z})$
4	3、2、1	$\tan^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{y}／\underline{x}_B\cdot\underline{x})$	$\sin^{-1}(-\underline{x}_B\cdot\underline{z})$	$\tan^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{z}／\underline{z}_B\cdot\underline{z})$
5	1、3、2	$\tan^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{z}／\underline{y}_B\cdot\underline{y})$	$\sin^{-1}(-\underline{y}_B\cdot\underline{x})$	$\tan^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{x}／\underline{x}_B\cdot\underline{x})$
6	2、1、3	$\tan^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{x}／\underline{z}_B\cdot\underline{z})$	$\sin^{-1}(-\underline{z}_B\cdot\underline{y})$	$\tan^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{y}／\underline{y}_B\cdot\underline{y})$
7	1、2、1	$\tan^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{y}／-\underline{x}_B\cdot\underline{z})$	$\cos^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{x})$	$\tan^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{x}／\underline{z}_B\cdot\underline{x})$
8	2、3、2	$\tan^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{z}／-\underline{y}_B\cdot\underline{x})$	$\cos^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{y})$	$\tan^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{y}／\underline{x}_B\cdot\underline{y})$
9	3、1、3	$\tan^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{x}／-\underline{z}_B\cdot\underline{y})$	$\cos^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{z})$	$\tan^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{z}／\underline{y}_B\cdot\underline{z})$
10	3、2、3	$\tan^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{y}／\underline{z}_B\cdot\underline{x})$	$\cos^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{z})$	$\tan^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{z}／-\underline{x}_B\cdot\underline{z})$
11	1、3、1	$\tan^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{z}／\underline{x}_B\cdot\underline{y})$	$\cos^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{x})$	$\tan^{-1}(\underline{z}_B\cdot\underline{x}／-\underline{y}_B\cdot\underline{x})$
12	2、1、2	$\tan^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{x}／\underline{y}_B\cdot\underline{z})$	$\cos^{-1}(\underline{y}_B\cdot\underline{y})$	$\tan^{-1}(\underline{x}_B\cdot\underline{y}／-\underline{z}_B\cdot\underline{y})$

(2) オイラー角の微係数

基準座標系に対する回転座標系の回転角速度を次式で表す。

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B}\underline{x}_B + \omega_{y_B}\underline{y}_B + \omega_{z_B}\underline{z}_B \quad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}5)$$

このとき、(2.3.2-3)式の回転軸i、j、kの各軸(図2.3.2-1に示した例では、それぞれx軸、y’軸、z”軸)周りの回転角速度がオイラー角の微係数であり、これらを順次求める。

第1回目の回転は下記のように表される。

$$\left(\underline{x}' \quad \underline{y}' \quad \underline{z}'\right) = \left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}6)$$

この回転による角速度は、回転後の座標系で下記のように表される。

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \underline{i} = \dot{\theta}_1\left(\underline{x}' \quad \underline{y}' \quad \underline{z}'\right)\underline{\delta}_i = \dot{\theta}_1\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}7)$$

$$\text{ここで、}\underline{\delta}_i = \begin{cases} \underline{x} = (1 \quad 0 \quad 0)^T & : \text{ i ＝１の時} \\ \underline{y} = (0 \quad 1 \quad 0)^T & : \text{ i ＝２の時} \\ \underline{z} = (0 \quad 0 \quad 1)^T & : \text{ i ＝３の時} \end{cases} \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}8)$$

同様に、第2回目の回転は下記のように表される。

$$\left(\underline{x}'' \quad \underline{y}'' \quad \underline{z}''\right) = \left(\underline{x}' \quad \underline{y}' \quad \underline{z}'\right)\cdot[\theta_2]_j = \left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta}_2 \underline{j} = \dot{\theta}_2\left(\underline{x}'' \quad \underline{y}'' \quad \underline{z}''\right)\cdot\underline{\delta}_j = \dot{\theta}_2\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\underline{\delta}_j \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}10)$$

第3回目の回転も同様にして、下記のように表される。

$$\left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right) = \left(\underline{x}'' \quad \underline{y}'' \quad \underline{z}''\right)\cdot[\theta_3]_k = \left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\theta}_3 \underline{k} = \dot{\theta}_3\left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right)\cdot\underline{\delta}_k = \dot{\theta}_3\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}12)$$

上記の角速度の合計が回転座標系の回転角速度となり、下記のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_B &= \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\theta}_1\underline{i} + \dot{\theta}_2\underline{j} + \dot{\theta}_3\underline{k} \\ &= \dot{\theta}_1\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i \\ &\quad + \dot{\theta}_2\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\underline{\delta}_j \\ &\quad + \dot{\theta}_3\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k \end{aligned} \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}13)$$

よって、この式と(2.3.2-5)式を等値して

$$\begin{aligned} &\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot\left(\dot{\theta}_1[\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i + \dot{\theta}_2[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot\underline{\delta}_j + \dot{\theta}_3[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k\right) \\ &\qquad = \omega_{x_B}\underline{x}_B + \omega_{y_B}\underline{y}_B + \omega_{z_B}\underline{z}_B \end{aligned} \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}14)$$

上式を書き直して整理すると

$$\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot\left([\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot\underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix} = \left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right)\cdot\begin{pmatrix}\omega_{x_B}\\ \omega_{y_B}\\ \omega_{z_B}\end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot\left([\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot\underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix} = \left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)\cdot[\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\begin{pmatrix}\omega_{x_B}\\ \omega_{y_B}\\ \omega_{z_B}\end{pmatrix}$$

$$\left([\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\right)^T\cdot\left([\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot\underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_{x_B}\\ \omega_{y_B}\\ \omega_{z_B}\end{pmatrix}$$

$$\left([-\theta_3]_k\cdot[-\theta_2]_j\cdot[-\theta_1]_i\right)\cdot\left([\theta_1]_i\cdot\underline{\delta}_i \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot\underline{\delta}_j \quad [\theta_1]_i\cdot[\theta_2]_j\cdot[\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_k\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_{x_B}\\ \omega_{y_B}\\ \omega_{z_B}\end{pmatrix}$$

$$\left([-\theta_3]_k\cdot[-\theta_2]_j\cdot\underline{\delta}_i \quad [-\theta_3]_k\cdot\underline{\delta}_j \quad \underline{\delta}_k\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_{x_B}\\ \omega_{y_B}\\ \omega_{z_B}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (2.3.2\text{-}15)$$

従って、オイラー角の微係数は上式から、下記のように表される。

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \left([-\theta_3]_k \cdot [-\theta_2]_j \cdot \underline{\delta}_i \quad [-\theta_3]_k \cdot \underline{\delta}_j \quad \underline{\delta}_k \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x_B} \\ \omega_{y_B} \\ \omega_{z_B} \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.2\text{-}16)$$

上記の回転座標系の回転角速度からオイラー角微係数への変換マトリクスは、表2.3-4の通りである。

表2.3-4　オイラー角微係数への変換マトリクス

No.	i、j、k	オイラー角微係数への変換マトリクス
1	1、2、3	$\begin{matrix} c\theta_3 / c\theta_2 & -s\theta_3 / c\theta_2 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ -s\theta_2\, c\theta_3 / c\theta_2 & s\theta_2\, s\theta_3 / c\theta_2 & 1 \end{matrix}$
2	2、3、1	$\begin{matrix} 0 & c\theta_3 / c\theta_2 & -s\theta_3 / c\theta_2 \\ 0 & s\theta_3 & c\theta_3 \\ 1 & -s\theta_2\, c\theta_3 / c\theta_2 & s\theta_2\, s\theta_3 / c\theta_2 \end{matrix}$
3	3、1、2	$\begin{matrix} -s\theta_3 / c\theta_2 & 0 & c\theta_3 / c\theta_2 \\ c\theta_3 & 0 & s\theta_3 \\ s\theta_2\, s\theta_3 / c\theta_2 & 1 & -s\theta_2\, c\theta_3 / c\theta_2 \end{matrix}$
4	3、2、1	$\begin{matrix} 0 & s\theta_3 / c\theta_2 & c\theta_3 / c\theta_2 \\ 0 & c\theta_3 & -s\theta_3 \\ 1 & s\theta_2\, s\theta_3 / c\theta_2 & s\theta_2\, c\theta_3 / c\theta_2 \end{matrix}$
5	1、3、2	$\begin{matrix} c\theta_3 / c\theta_2 & 0 & s\theta_3 / c\theta_2 \\ -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 \\ s\theta_2\, c\theta_3 / c\theta_2 & 1 & s\theta_2\, s\theta_3 / c\theta_2 \end{matrix}$
6	2、1、3	$\begin{matrix} s\theta_3 / c\theta_2 & c\theta_3 / c\theta_2 & 0 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_2\, s\theta_3 / c\theta_2 & s\theta_2\, c\theta_3 / c\theta_2 & 1 \end{matrix}$
7	1、2、1	$\begin{matrix} 0 & s\theta_3 / s\theta_2 & c\theta_3 / s\theta_2 \\ 0 & c\theta_3 & -s\theta_3 \\ 1 & -c\theta_2\, s\theta_3 / s\theta_2 & -c\theta_2\, c\theta_3 / s\theta_2 \end{matrix}$
8	2、3、2	$\begin{matrix} c\theta_3 / s\theta_2 & 0 & s\theta_3 / s\theta_2 \\ -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 \\ -c\theta_2\, c\theta_3 / s\theta_2 & 1 & -c\theta_2\, s\theta_3 / s\theta_2 \end{matrix}$
9	3、1、3	$\begin{matrix} s\theta_3 / s\theta_2 & c\theta_3 / s\theta_2 & 0 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ -c\theta_2\, s\theta_3 / s\theta_2 & -c\theta_2\, c\theta_3 / s\theta_2 & 1 \end{matrix}$
10	3、2、3	$\begin{matrix} -c\theta_3 / s\theta_2 & s\theta_3 / s\theta_2 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ c\theta_2\, c\theta_3 / s\theta_2 & -c\theta_2\, s\theta_3 / s\theta_2 & 1 \end{matrix}$
11	1、3、1	$\begin{matrix} 0 & -c\theta_3 / s\theta_2 & s\theta_3 / s\theta_2 \\ 0 & s\theta_3 & c\theta_3 \\ 1 & c\theta_2\, c\theta_3 / s\theta_2 & -c\theta_2\, s\theta_3 / s\theta_2 \end{matrix}$
12	2、1、2	$\begin{matrix} s\theta_3 / s\theta_2 & 0 & -c\theta_3 / s\theta_2 \\ c\theta_3 & 0 & s\theta_3 \\ -c\theta_2\, s\theta_3 / s\theta_2 & 1 & c\theta_2\, c\theta_3 / s\theta_2 \end{matrix}$

（注）$s\theta_n = \sin\theta_n$、$c\theta_n = \cos\theta_n$であり、nは何回目の回転角かを示す。

2.3.3 四元数(クォータニオン)法

(1) 四元数

四元数は、一つの実数と3種類の虚数から成る超複素数で、次のように表される。

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}1)$$

ここでq_0、q_1、q_2、q_3は実係数で、オイラーパラメータと呼ばれる。

この3種類の虚数単位は下記の乗算規則が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{i}*\mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = -1、\mathbf{i}*\mathbf{j} = \mathbf{k}、\mathbf{i}*\mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ &\mathbf{j}*\mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = -1、\mathbf{j}*\mathbf{k} = \mathbf{i}、\mathbf{j}*\mathbf{i} = -\mathbf{k} \\ &\mathbf{k}*\mathbf{k} = \mathbf{k}^2 = -1、\mathbf{k}*\mathbf{i} = \mathbf{j}、\mathbf{k}*\mathbf{j} = -\mathbf{i} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}2)$$

これら3種類の虚数単位を下記のマトリクスで表すと、これらは上記の乗算規則を満足する。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}3)$$

ここで、i : 通常の虚数単位 $\sqrt{-1}$

四元数の虚数単位は(2.3.3-2)式に示したように、3つが互いに直交したベクトルの性質を持っているので、4.1項に示したオイラー軸ベクトルの座標軸単位ベクトルに対応させてオイラー軸を下記のように表したとき

$$\underline{e} = e_i\mathbf{i} + e_j\mathbf{j} + e_k\mathbf{k} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}4)$$

このオイラー軸ベクトルを四元数の虚数部に対応させて、オイラー軸周りの回転角 θ を用いて(2.3.3-1)式を次のように表せば、四元数で座標系の回転を表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\underline{e} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}e_i\mathbf{i} + \sin\frac{\theta}{2}e_j\mathbf{j} + \sin\frac{\theta}{2}e_k\mathbf{k} \\ &= q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}5) \end{aligned}$$

ここで、$q_0 = \cos\frac{\theta}{2}$、$q_1 = \sin\frac{\theta}{2}e_i$、$q_2 = \sin\frac{\theta}{2}e_j$、$q_3 = \sin\frac{\theta}{2}e_k$ $\cdots\cdots$ (2.3.3-6)

(2) 四元数の演算

四元数同志の乗算は下記で表される。

$\mathbf{Q}_1 = \cos\frac{\theta_1}{2} + \sin\frac{\theta_1}{2}\underline{e}_1 = c_1 + s_1\underline{e}_1$、 $\underline{e}_1 = e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}$

$\mathbf{Q}_2 = \cos\frac{\theta_2}{2} + \sin\frac{\theta_2}{2}\underline{e}_2 = c_2 + s_2\underline{e}_2$、 $\underline{e}_2 = e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}$ としたとき

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2 &= (c_1 + s_1\underline{e}_1) * (c_2 + s_2\underline{e}_2) \\ &= \left\{c_1 + s_1\left(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}\right)\right\} * \left\{c_2 + s_2\left(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}\right)\right\} \\ &= c_1c_2 + c_1s_2\left(e_{2i}\mathbf{i} + e_{2j}\mathbf{j} + e_{2k}\mathbf{k}\right) + s_1c_2\left(e_{1i}\mathbf{i} + e_{1j}\mathbf{j} + e_{1k}\mathbf{k}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+s_1s_2\left(e_{1i}\mathbf{i}+e_{1j}\mathbf{j}+e_{1k}\mathbf{k}\right)*\left(e_{2i}\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{k}\right)\\
&=c_1c_2+c_1s_2\left(e_{2i}\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{k}\right)+s_1c_2\left(e_{1i}\mathbf{i}+e_{1j}\mathbf{j}+e_{1k}\mathbf{k}\right)\\
&\quad+s_1s_2\left\{e_{1i}\left(e_{2i}\mathbf{i}*\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{i}*\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{i}*\mathbf{k}\right)+e_{1j}\left(e_{2i}\mathbf{j}*\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{j}*\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{j}*\mathbf{k}\right)+e_{1k}\left(e_{2i}\mathbf{k}*\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{k}*\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{k}*\mathbf{k}\right)\right\}\\
&=c_1c_2+c_1s_2\left(e_{2i}\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{k}\right)+s_1c_2\left(e_{1i}\mathbf{i}+e_{1j}\mathbf{j}+e_{1k}\mathbf{k}\right)\\
&\quad+s_1s_2\left\{e_{1i}\left(-e_{2i}+e_{2j}\mathbf{k}-e_{2k}\mathbf{j}\right)+e_{1j}\left(-e_{2i}\mathbf{k}-e_{2j}+e_{2k}\mathbf{i}\right)+e_{1k}\left(e_{2i}\mathbf{j}-e_{2j}\mathbf{i}-e_{2k}\right)\right\}\\
&=c_1c_2+c_1s_2\left(e_{2i}\mathbf{i}+e_{2j}\mathbf{j}+e_{2k}\mathbf{k}\right)+s_1c_2\left(e_{1i}\mathbf{i}+e_{1j}\mathbf{j}+e_{1k}\mathbf{k}\right)\\
&\quad-s_1s_2\left(e_{1i}e_{2i}+e_{1j}e_{2j}+e_{1k}e_{2k}\right)\\
&\quad+s_1s_2\left\{\left(e_{1j}e_{2k}-e_{1k}e_{2j}\right)\mathbf{i}+\left(e_{1k}e_{2i}-e_{1i}e_{2k}\right)\mathbf{j}+\left(e_{1i}e_{2j}-e_{1j}e_{2i}\right)\mathbf{k}\right\}
\end{aligned}
$$

この式はオイラー軸ベクトルのベクトル演算で内積（演算記号・）と外積（演算記号×）を用いて、下記のように書き換えることができる。

$$\mathbf{Q}_1*\mathbf{Q}_2=c_1c_2+c_1s_2\underline{e}_2+s_1c_2\underline{e}_1-s_1s_2\left(\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2\right)+s_1s_2\left(\underline{e}_1\times\underline{e}_2\right)$$

よって、虚数部をベクトルで表現した四元数の乗算は、新しい演算記号⊗を用いて、下記のように表現される。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1\otimes\mathbf{Q}_2&=\left(c_1+s_1\underline{e}_1\right)\otimes\left(c_2+s_2\underline{e}_2\right)\\
&=c_1c_2+s_1c_2\underline{e}_1+c_1s_2\underline{e}_2+s_1s_2\left(\underline{e}_1\times\underline{e}_2-\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2\right)\\
&=\begin{pmatrix}c_1 & -s_1\left(\underline{e}_1\right)^T\\ s_1\underline{e}_1 & c_1\mathbf{1}+s_1\left[\underline{e}_1\times\right]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_2\\ s_2\underline{e}_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots\cdots(2.3.3\text{-}7)
$$

このように、四元数はスカラー部とベクトル部で構成されるものとして、ベクトル演算で扱うことができる。

（3） 共役四元数

四元数のベクトル部の符号を反転させることは、オイラー軸の符号が反転して回転の方向を反対にすることとなる。これを共役四元数と呼び、下記のように表される。

$$\mathbf{Q}^*=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\underline{e}=c-s\underline{e}\quad\cdots\cdots\cdots(2.3.3\text{-}8)$$

四元数とその共役四元数の関係は、方向余弦マトリクスとその転置マトリクスの関係に対応し、四元数とその共役四元数の乗算は、下記のように表される。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}^*&=\left(c+s\underline{e}\right)\otimes\left(c-s\underline{e}\right)=\begin{pmatrix}c & -s\left(\underline{e}\right)^T\\ s\underline{e} & c\mathbf{1}+s\left[\underline{e}\times\right]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\ -s\underline{e}\end{pmatrix}\\
&=c^2+cs\underline{e}+s^2\left(\underline{e}\cdot\underline{e}\right)-cs\underline{e}-s^2\left(\underline{e}\times\underline{e}\right)=1
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots\cdots(2.3.3\text{-}9)
$$

（4） 四元数とベクトルの乗算

ベクトルはスカラー部がゼロの四元数として扱い、下記のように乗算できる。

$$\mathbf{Q}\otimes\mathbf{a}=\left(c+s\underline{e}\right)\otimes\left(0+\mathbf{a}\right)=\begin{pmatrix}c & -s\left(\underline{e}\right)^T\\ s\underline{e} & c\mathbf{1}+s\left[\underline{e}\times\right]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{a}\end{pmatrix}=-s\left(\underline{e}\cdot\mathbf{a}\right)+c\mathbf{a}+s\left(\underline{e}\times\mathbf{a}\right)\quad\cdots\cdots\cdots(2.3.3\text{-}10)$$

（5） 四元数によるベクトル及び座標系の回転

四元数を用いたベクトルの回転は、下記のように表現できる。

$$\mathbf{a}'=\mathbf{Q}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{Q}^*\quad\cdots\cdots\cdots(2.3.3\text{-}11)$$

$$=\begin{pmatrix} c & -s(\underline{e})^T \\ s\underline{e} & c\mathbf{1}+s[\underline{e}\times] \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}\otimes\mathbf{Q}^* = \{-s(\underline{e}\cdot\mathbf{a})+c\mathbf{a}+s(\underline{e}\times\mathbf{a})\}\otimes\mathbf{Q}^*$$

$$=\begin{pmatrix} -s(\underline{e}\cdot\mathbf{a}) & \{-c\mathbf{a}-s(\underline{e}\times\mathbf{a})\}^T \\ c\mathbf{a}+s(\underline{e}\times\mathbf{a}) & -s(\underline{e}\cdot\mathbf{a})\mathbf{1}+\{c[\mathbf{a}\times]+s[(\underline{e}\times\mathbf{a})\times]\} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c \\ -s\underline{e} \end{pmatrix}$$

$$=\left\{-sc(\underline{e}\cdot\mathbf{a})+sc(\mathbf{a}\cdot\underline{e})+s^2(\underline{e}\times\mathbf{a})\cdot\underline{e}\right\}+c^2\mathbf{a}+sc(\underline{e}\times\mathbf{a})+s^2(\underline{e}\cdot\mathbf{a})\underline{e}-sc(\mathbf{a}\times\underline{e})-s^2(\underline{e}\times\mathbf{a})\times\underline{e}$$

ここで、ベクトル3重積$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$より$(\underline{e}\cdot\mathbf{a})\underline{e}=(\underline{e}\cdot\underline{e})\mathbf{a}-\underline{e}\times(\mathbf{a}\times\underline{e})=\mathbf{a}+\underline{e}\times(\underline{e}\times\mathbf{a})$であり、また、スカラー3重積$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$より$(\underline{e}\times\mathbf{a})\cdot\underline{e}=(\underline{e}\times\underline{e})\cdot\mathbf{a}=0$であるから、これらを代入して整理すると

$$\mathbf{a}'=c^2\mathbf{a}+2sc(\underline{e}\times\mathbf{a})+s^2\{\mathbf{a}+\underline{e}\times(\underline{e}\times\mathbf{a})\}+s^2\underline{e}\times(\underline{e}\times\mathbf{a})$$

$$=\mathbf{a}+2sc(\underline{e}\times\mathbf{a})+2s^2\{\underline{e}\times(\underline{e}\times\mathbf{a})\}$$

$$=\left\{\mathbf{1}+2sc[\underline{e}\times]+2s^2[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot\mathbf{a}$$

$$=\left\{\mathbf{1}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]+2\sin^2\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot\mathbf{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.3.3-12)}$$

また、(2.2.1-3)式のベクトルの回転を表すマトリクスにおいて

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\quad\text{および}$$

$$1-\cos\theta=1-\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=1-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=2\sin^2\frac{\theta}{2}\quad\text{であるから}$$

これらを(2.2.1-3)式に代入すると下記のように表されるので、(2.3.3-12)式はベクトルの回転を表す(2.2.1-3)式と同じことが分かる。

$$\mathbf{a}'=\left\{\mathbf{1}+\sin\theta[\underline{e}\times]+(1-\cos\theta)[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot\mathbf{a}$$

$$=\left\{\mathbf{1}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]+2\sin^2\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]^2\right\}\cdot\mathbf{a}$$

上記の(2.3.3-12)式を四元数の実係数$q_0=\cos\frac{\theta}{2}$、$q_1=\sin\frac{\theta}{2}e_i$、$q_2=\sin\frac{\theta}{2}e_j$、$q_3=\sin\frac{\theta}{2}e_k$を用いてマトリクス形式に表現して書き直すと

$$\mathbf{a}'=\begin{pmatrix} 1+2s^2\left(-e_j{}^2-e_k{}^2\right) & 2s^2e_je_i-2sce_k & 2s^2e_ke_i+2sce_j \\ 2s^2e_ie_j+2sce_k & 1+2s^2\left(-e_k{}^2-e_i{}^2\right) & 2s^2e_ke_j-2sce_i \\ 2s^2e_ie_k-2sce_j & 2s^2e_je_k+2sce_i & 1+2s^2\left(-e_i{}^2-e_j{}^2\right) \end{pmatrix}\cdot\mathbf{a}$$

ここで$1+2s^2\left(-e_j{}^2-e_k{}^2\right)=1+s^2\left(-e_j{}^2-e_k{}^2\right)+s^2\left(-e_j{}^2-e_k{}^2\right)$

$$=1+s^2\left(e_i{}^2-1\right)+s^2\left(-e_j{}^2-e_k{}^2\right)=1-s^2+s^2e_i{}^2+s^2\left(-e_j{}^2-e_k{}^2\right)=c^2+s^2\left(e_i{}^2-e_j{}^2-e_k{}^2\right)$$

であり、他の2つの対角要素も同様に表せるから

$$\mathbf{a}'=\begin{pmatrix} c^2+s^2\left(e_i{}^2-e_j{}^2-e_k{}^2\right) & 2s^2e_je_i-2sce_k & 2s^2e_ke_i+2sce_j \\ 2s^2e_ie_j+2sce_k & c^2+s^2\left(e_j{}^2-e_k{}^2-e_i{}^2\right) & 2s^2e_ke_j-2sce_i \\ 2s^2e_ie_k-2sce_j & 2s^2e_je_k+2sce_i & c^2+s^2\left(e_k{}^2-e_i{}^2-e_j{}^2\right) \end{pmatrix}\cdot\mathbf{a}$$

$$
=\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_1-q_0q_3) & 2(q_3q_1+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_3q_2-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.3\text{-}13)
$$

基準座標系Iを$\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)$とし、その座標系をベクトル$\underline{e}$周りに角度$\theta$だけ回転して得られる回転座標系Bを$\left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right)$としたとき、(2.3.3-12)式の$\mathbf{a}$及び$\mathbf{a}'$にそれぞれの座標軸ベクトルを順次代入すると、基底の座標系から見たときの基準座標系Iから回転座標系Bまでの回転を表すマトリクスが、次式のように得られる。

$$
\left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right)=\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_1-q_0q_3) & 2(q_3q_1+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_3q_2-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix}\cdot\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right) \quad \cdots (2.3.3\text{-}14)
$$

ここで基準座標系Iを基底の座標系に採れば、その座標系を表すマトリクス$\left(\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}\right)$は単位マトリクス[1]となるので省略して表記すれば、座標系Iから見た座標系Bの方向余弦マトリクスが下記のように表される。

$$
\mathbf{D}_B^I \equiv \left(\underline{x}_B \quad \underline{y}_B \quad \underline{z}_B\right)=\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_1-q_0q_3) & 2(q_3q_1+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_3q_2-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}15)
$$

(6) 多段階の回転

基準座標系で表したオイラー軸で定義された四元数を用いて、基準座標系で表した任意のベクトルを座標系Aから座標系Bへ回転させ、さらに座標系Bから座標系Cへ回転させると、それは(2.3.3-11)式を用いて下記のように表される。

$$
\mathbf{a}'=\left(\mathbf{Q}_B^A\right)^I\otimes\mathbf{a}\otimes\left(\mathbf{Q}_B^A\right)^{I*}
$$

$$
\mathbf{a}''=\left(\mathbf{Q}_C^B\right)^I\otimes\mathbf{a}'\otimes\left(\mathbf{Q}_C^B\right)^{I*}=\left(\mathbf{Q}_C^B\right)^I\otimes\left(\mathbf{Q}_B^A\right)^I\otimes\mathbf{a}\otimes\left(\mathbf{Q}_B^A\right)^{I*}\otimes\left(\mathbf{Q}_C^B\right)^{I*}=\left(\mathbf{Q}_C^A\right)^I\otimes\mathbf{a}\otimes\left(\mathbf{Q}_C^A\right)^{I*}
$$

ここで、$\left(\mathbf{Q}_B^A\right)^I$:基準座標系から見たときの座標系Aから座標系Bへの回転を表す四元数

$\left(\mathbf{Q}_C^B\right)^I$:基準座標系から見たときの座標系Bから座標系Cへの回転を表す四元数

$\left(\mathbf{Q}_C^A\right)^I$:基準座標系から見たときの座標系Aから座標系Cへの回転を表す四元数

よって、基準座標系から見たときの座標系Aから座標系Cへの回転を表す四元数は下記のように表される。

$$
\left(\mathbf{Q}_C^A\right)^I=\left(\mathbf{Q}_C^B\right)^I\otimes\left(\mathbf{Q}_B^A\right)^I \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.3\text{-}16)
$$

上式は(1.2-19)式に示した座標系の回転を表すマトリクスと同様であり、上式と同じ回転を表すマトリクスは下記のように表現されるので、四元数と一対一の対応が付けられる。

$$
\left(\mathbf{D}_C^A\right)^I=\left(\mathbf{D}_C^B\right)^I\cdot\left(\mathbf{D}_B^A\right)^I \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.3.3\text{-}17)
$$

(7) 座標変換

四元数を用いて作った方向余弦マトリクス(2.3.3-15)式は座標系Iから座標系Bへの回転を表しているが、(1.3-8)式のように座標系Bから座標系Iへの座標変換を表すこともできるので、これらは方向余弦マトリクス

と四元数を対比して下記のように表現される。

$$\mathbf{a}'^{\mathrm{I}} = \mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{I}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}'^{\mathrm{I}} = \mathbf{Q}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \otimes \mathbf{a}^{\mathrm{I}} \otimes \mathbf{Q}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}*}$$

：ベクトルの回転

$$\mathbf{a}^{\mathrm{I}} = \mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{B}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}^{\mathrm{I}} = \mathbf{Q}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \otimes \mathbf{a}^{\mathrm{B}} \otimes \mathbf{Q}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}*}$$

：ベクトルの座標変換 ・・・・・・・・・・・・・・(2.3.3-18)

（8） 座標系の順次回転

1.2-(4)項に示した方向余弦マトリクスのように、座標系を回転してできた新たな座標系を基準としてさらに回転を続けて得られる四元数は、方向余弦マトリクスの場合と対比して下記のように求められる。

まず、座標系Rから見た座標系Iから座標系Bへの回転が下記のように表せるから

$$\left(\underline{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \quad \underline{y}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}} \quad \underline{z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{R}}\right) = \left(\mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{R}} \cdot \left(\underline{x}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}} \quad \underline{y}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}} \quad \underline{z}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{R}}\right)$$

ここで座標系Rを座標系Iと同じに採ると下記のようになる。

$$\left(\underline{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{y}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right) = \left(\mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} \cdot \left(\underline{x}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{y}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{z}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}}\right) = \left(\mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}19)$$

順次回転した方向余弦マトリクスは、座標軸ベクトルを用いて表すと下記のように記述されるので

$$\left(\underline{x}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{y}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}\right) = \left(\underline{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{y}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right) \cdot \left(\underline{x}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \quad \underline{y}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \quad \underline{z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right)$$

上記の式を(2.3.3-19)式の表現を用いて書き直すと、下記のように記述される。

$$\left(\underline{x}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{y}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}\right) = \left(\mathbf{D}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} = \left(\underline{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{y}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}} \quad \underline{z}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right) \cdot \left(\underline{x}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \quad \underline{y}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \quad \underline{z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right) = \left(\mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} \cdot \left(\mathbf{D}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{B}} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}20)$$

従って、(2.3.3-16)式と(2.3.3-17)式の対比を上記の式に適用して、座標系の順次回転を表す四元数を下記のように得ることができる。

$$\left(\mathbf{D}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} = \left(\mathbf{D}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} \cdot \left(\mathbf{D}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{B}} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}21)$$

$$\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} = \left(\mathbf{Q}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}} \cdot \left(\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{B}} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}22)$$

ここで、$\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}}$ ：座標系Iから見たときの座標系Iから座標系Cへの回転を表す四元数

$\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}}$ ：座標系Iから見たときの座標系Iから座標系Bへの回転を表す四元数

$\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{B}}$ ：座標系Bから見たときの座標系Bから座標系Cへの回転を表す四元数

上記の$\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}\right)^{\mathrm{B}}$のように座標系Bから見たときの座標系Bから座標系Cへの回転を表す四元数とは、オイラー軸ベクトルを座標系Bで表した四元数を意味する。

（9） 四元数の微係数

基準座標系に対する回転座標系の回転角速度及びオイラー軸ベクトルを次のように表す。

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} = \omega_{x_{\mathrm{B}}} \underline{x}_{\mathrm{B}} + \omega_{y_{\mathrm{B}}} \underline{y}_{\mathrm{B}} + \omega_{z_{\mathrm{B}}} \underline{z}_{\mathrm{B}} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}23)$$

$$\underline{e} = e_{x_{\mathrm{B}}} \underline{x}_{\mathrm{B}} + e_{y_{\mathrm{B}}} \underline{y}_{\mathrm{B}} + e_{z_{\mathrm{B}}} \underline{z}_{\mathrm{B}} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}24)$$

また、オイラー軸ベクトル及びその周りの回転角の微係数(2.2.2-7)式及び(2.2.2-8)式を書き直して、それぞれ下記のように表す。

$$\dot{\underline{e}} = \frac{1}{2}\left\{[\underline{e}\times] - \cot\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]^2\right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\sin\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times] - \cos\frac{\theta}{2}[\underline{e}\times]^2\right\} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\left(e_{y_B}{}^2+e_{z_B}{}^2\right) & -\cos\frac{\theta}{2}e_{y_B}e_{x_B}-\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B} & -\cos\frac{\theta}{2}e_{z_B}e_{x_B}+\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e_{x_B}e_{y_B}+\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B} & \cos\frac{\theta}{2}\left(e_{z_B}{}^2+e_{x_B}{}^2\right) & -\cos\frac{\theta}{2}e_{z_B}e_{y_B}-\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B} \\ -\cos\frac{\theta}{2}e_{x_B}e_{z_B}-\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B} & -\cos\frac{\theta}{2}e_{y_B}e_{z_B}+\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B} & \cos\frac{\theta}{2}\left(e_{x_B}{}^2+e_{y_B}{}^2\right) \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{\omega}_B \quad \cdots(2.3.3\text{-}25)$$

$$\dot{\theta}=\boldsymbol{\omega}_B\cdot\underline{e}=\omega_{x_B}e_{x_B}+\omega_{y_B}e_{y_B}+\omega_{z_B}e_{z_B} \quad \cdots\cdots(2.3.3\text{-}26)$$

このとき、下記の四元数の実係数を微分して

$$\left.\begin{aligned} q_0&=\cos\frac{\theta}{2} \\ q_1&=\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B} \\ q_2&=\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B} \\ q_3&=\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.3.3\text{-}27)$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_0&=-\frac{\dot{\theta}}{2}\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\omega_{x_B}e_{x_B}+\omega_{y_B}e_{y_B}+\omega_{z_B}e_{z_B}\right) \\ &=-\frac{1}{2}\left(\omega_{x_B}q_1+\omega_{y_B}q_2+\omega_{z_B}q_3\right) \quad \cdots\cdots(2.3.3\text{-}28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_1&=\frac{\dot{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2}e_{x_B}+\sin\frac{\theta}{2}\dot{e}_{x_B} \\ &=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}e_{x_B}\left(\omega_{x_B}e_{x_B}+\omega_{y_B}e_{y_B}+\omega_{z_B}e_{z_B}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\left(e_{y_B}{}^2+e_{z_B}{}^2\right)\omega_{x_B}-\left(\cos\frac{\theta}{2}e_{y_B}e_{x_B}+\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B}\right)\omega_{y_B}-\left(\cos\frac{\theta}{2}e_{z_B}e_{x_B}-\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B}\right)\omega_{z_B}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\left(e_{x_B}{}^2+e_{y_B}{}^2+e_{z_B}{}^2\right)\omega_{x_B}-\left(\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B}\right)\omega_{y_B}+\left(\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B}\right)\omega_{z_B}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{q_0\omega_{x_B}-q_3\omega_{y_B}+q_2\omega_{z_B}\right\} \quad \cdots\cdots(2.3.3\text{-}29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_2&=\frac{\dot{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2}e_{y_B}+\sin\frac{\theta}{2}\dot{e}_{y_B} \\ &=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}e_{y_B}\left(\omega_{x_B}e_{x_B}+\omega_{y_B}e_{y_B}+\omega_{z_B}e_{z_B}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left\{-\left(\cos\frac{\theta}{2}e_{x_B}e_{y_B}-\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B}\right)\omega_{x_B}+\cos\frac{\theta}{2}\left(e_{z_B}{}^2+e_{x_B}{}^2\right)\omega_{y_B}-\left(\cos\frac{\theta}{2}e_{z_B}e_{y_B}+\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B}\right)\omega_{z_B}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(\sin\frac{\theta}{2}e_{z_B}\right)\omega_{x_B}+\cos\frac{\theta}{2}\left(e_{x_B}{}^2+e_{y_B}{}^2+e_{z_B}{}^2\right)\omega_{y_B}-\left(\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B}\right)\omega_{z_B}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{q_3\omega_{x_B}+q_0\omega_{y_B}-q_1\omega_{z_B}\right\} \quad \cdots\cdots(2.3.3\text{-}30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_3&=\frac{\dot{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2}e_{z_B}+\sin\frac{\theta}{2}\dot{e}_{z_B} \\ &=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}e_{z_B}\left(\omega_{x_B}e_{x_B}+\omega_{y_B}e_{y_B}+\omega_{z_B}e_{z_B}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left\{-\left(\cos\frac{\theta}{2}e_{x_B}e_{z_B}+\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B}\right)\omega_{x_B}-\left(\cos\frac{\theta}{2}e_{y_B}e_{z_B}-\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B}\right)\omega_{y_B}+\cos\frac{\theta}{2}\left(e_{x_B}{}^2+e_{y_B}{}^2\right)\omega_{z_B}\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{-\left(\sin\frac{\theta}{2}e_{y_B}\right)\omega_{x_B}+\left(\sin\frac{\theta}{2}e_{x_B}\right)\omega_{y_B}+\cos\frac{\theta}{2}\left(e_{x_B}{}^2+e_{y_B}{}^2+e_{z_B}{}^2\right)\omega_{z_B}\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-q_2\omega_{x_B}+q_1\omega_{y_B}+q_0\omega_{z_B}\right\} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}31)$$

上記をまとめると、四元数の微係数は下記で表される。

$$\dot{\mathbf{Q}}=\begin{pmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & q_0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & q_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_{x_B}\\\omega_{y_B}\\\omega_{z_B}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\omega_{x_B} & -\omega_{y_B} & -\omega_{z_B}\\ \omega_{x_B} & 0 & \omega_{z_B} & -\omega_{y_B}\\ \omega_{y_B} & -\omega_{z_B} & 0 & \omega_{x_B}\\ \omega_{z_B} & \omega_{y_B} & -\omega_{x_B} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}32)$$

（10） 角度増分に基づく四元数の更新

四元数のn次微分は(2.3.3-32)式より、次のように表される。

$$\frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{Q})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}_B\otimes]\cdot\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\mathbf{Q})=\cdots\cdots=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}_B\otimes]^{n-1}\cdot\dot{\mathbf{Q}}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}_B\otimes]^{n}\cdot\mathbf{Q} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}33)$$

ここで、$[\boldsymbol{\omega}_B\otimes]=\begin{pmatrix}0 & -\omega_{x_B} & -\omega_{y_B} & -\omega_{z_B}\\ \omega_{x_B} & 0 & \omega_{z_B} & -\omega_{y_B}\\ \omega_{y_B} & -\omega_{z_B} & 0 & \omega_{x_B}\\ \omega_{z_B} & \omega_{y_B} & -\omega_{x_B} & 0\end{pmatrix}$

よって、微小期間をΔT、現時点をk、現時点よりΔT前の時点をk－1としたとき、四元数は方向余弦マトリクスの場合と同様に、(2.3.1-5)式に(2.3.3-33)式を代入して、次のようにテーラー級数で表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_k&=\mathbf{Q}_{k-1}+\Delta T\dot{\mathbf{Q}}_{k-1}+\frac{\Delta T^2}{2!}\ddot{\mathbf{Q}}_{k-1}+\cdots\cdots+\frac{\Delta T^n}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(\mathbf{Q}_{k-1})+\cdots\cdots\\&=\mathbf{Q}_{k-1}+\frac{\Delta T}{2}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]\cdot\mathbf{Q}_{k-1}+\frac{\Delta T^2}{2^2 2!}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]^2\cdot\mathbf{Q}_{k-1}+\cdots\cdots+\frac{\Delta T^n}{2^n n!}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]^n\cdot\mathbf{Q}_{k-1}+\cdots\cdots\\&=\left(\mathbf{1}+\frac{\Delta T}{2}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]+\frac{\Delta T^2}{2^2 2!}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]^2+\cdots\cdots+\frac{\Delta T^n}{2^n n!}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]^n+\cdots\cdots\right)\cdot\mathbf{Q}_{k-1}\\&=e^{\frac{\Delta T}{2}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]}\cdot\mathbf{Q}_{k-1} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}34)\end{aligned}$$

ここでマトリクス指数関数$e^{\frac{\Delta T}{2}[\boldsymbol{\omega}_{B,k-1}\otimes]}$は推移マトリクスと呼ばれ、k－1時点からk時点までのΔT間の推移を表している。

基準座標系Iを(o-x, y, z)、回転座標系Bを(o-x_B, y_B, z_B)としたとき、基準座標系からk－1時点の回転座標系への回転を示す四元数を$\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}$、k－1時点の回転座標系からk時点の回転座標系への回転を示す四元数を$\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}$とすると、基準座標系の座標軸単位ベクトル$(\underline{x}\ \ \underline{y}\ \ \underline{z})$をk時点の回転座標系の座標軸単位ベクトル$(\underline{x}_B\ \ \underline{y}_B\ \ \underline{z}_B)$へ回転させる四元数$\mathbf{Q}^{I}_{B,k}$は、(2.3.3-11)式より次のように表される。

$$\mathbf{a}'=\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}\otimes\mathbf{a}\otimes\left(\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}\right)^*$$

$$\mathbf{a}''=\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}\otimes\mathbf{a}'\otimes\left(\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}\right)^*=\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}\otimes\left\{\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}\otimes\mathbf{a}\otimes\left(\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}\right)^*\right\}\otimes\left(\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}\right)^*$$

$$=\left\{\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}\otimes\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}\right\}\otimes\mathbf{a}\otimes\left\{\left(\mathbf{Q}^{I}_{B,k-1}\right)^*\otimes\left(\mathbf{Q}^{B,k-1}_{B,k}\right)^*\right\}=\mathbf{Q}^{I}_{B,k}\otimes\mathbf{a}\otimes\left(\mathbf{Q}^{I}_{B,k}\right)^* \text{ より}$$

$$(\underline{x}_B\ \ \underline{y}_B\ \ \underline{z}_B)=\mathbf{Q}^{I}_{B,k}\otimes(\underline{x}\ \ \underline{y}\ \ \underline{z})\otimes\left(\mathbf{Q}^{I}_{B,k}\right)^* \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}35)$$

$$\mathbf{Q}_{B,k}^{I}=\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}\otimes\mathbf{Q}_{B,k-1}^{I} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.3.3-36)}$$

ここで上記の四元数は何れも基準座標系から見たオイラー軸で定義されているが、$\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}$はk－1時点からk時点までの角度増分を用いて回転座標系で表すのが便利であり、それは下記のように表される。

$$\left(\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}\right)^{B,k-1}=\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\sin\frac{\Delta\theta}{2}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta\theta}$$

$$=\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\Delta\boldsymbol{\theta} \quad \cdots \text{(2.3.3-37)}$$

ここで、$\Delta\boldsymbol{\theta}\equiv\begin{pmatrix}\Delta\theta_x\\ \Delta\theta_y\\ \Delta\theta_z\end{pmatrix}$:回転座標系での角度増分

$$\Delta\theta=\left|\Delta\boldsymbol{\theta}\right|=\sqrt{\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2}$$

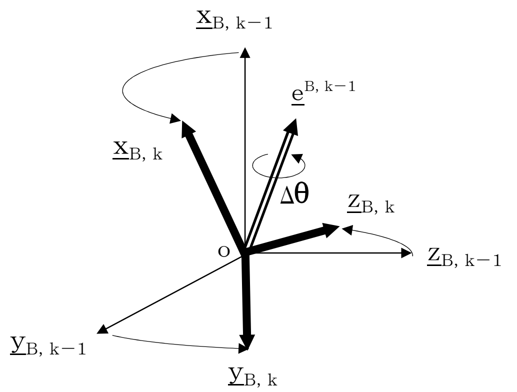


図2.3-2　回転座標系におけるオイラー軸

従って、これを(2.3.3-22)式の四元数を用いて表せば、下記のように記述される。

$$\mathbf{Q}_{B,k}^{I}=\mathbf{Q}_{B,k-1}^{I}\otimes\left(\mathbf{Q}_{B,k}^{B,k-1}\right)^{B,k-1}$$

$$=\begin{pmatrix}q_0\\ q_0\\ q_0\\ q_0\end{pmatrix}_k=\begin{pmatrix}c_n & -\Delta\theta_x s_n & -\Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_z s_n\\ \Delta\theta_x s_n & c_n & \Delta\theta_z s_n & -\Delta\theta_y s_n\\ \Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_z s_n & c_n & \Delta\theta_x s_n\\ \Delta\theta_z s_n & \Delta\theta_y s_n & -\Delta\theta_x s_n & c_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q_0\\ q_0\\ q_0\\ q_0\end{pmatrix}_{k-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.3.3-38)}$$

ここで、$\mathbf{Q}_{B,k}^{I}=\begin{pmatrix}q_0\\ q_0\\ q_0\\ q_0\end{pmatrix}_k$

$$\mathbf{Q}_{B,k-1}^{I}=\begin{pmatrix}q_0\\ q_0\\ q_0\\ q_0\end{pmatrix}_{k-1}$$

$$s_n=\frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.3.3-39)}$$

$$c_n=\cos\frac{\Delta\theta}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2.3.3-40)}$$

(11) 方向余弦マトリクスから四元数への変換

回転体の姿勢は方向余弦マトリクスで表すのが簡単で、(1.2-28)式に示したように基準とする座標系を順次回転して回転体の初期姿勢を方向余弦マトリクスで求め、(2.3.3-15)式に示した方向余弦マトリクスと四元数との対応から下記のように四元数を求めれば、上記(2.3.3-38)式における四元数の初期値として用いることができる。

$$\mathbf{D}_B^I\equiv\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0{}^2+q_1{}^2-q_2{}^2-q_3{}^2 & 2\left(q_2q_1-q_0q_3\right) & 2\left(q_3q_1+q_0q_2\right)\\ 2\left(q_1q_2+q_0q_3\right) & q_0{}^2-q_1{}^2+q_2{}^2-q_3{}^2 & 2\left(q_3q_2-q_0q_1\right)\\ 2\left(q_1q_3-q_0q_2\right) & 2\left(q_2q_3+q_0q_1\right) & q_0{}^2-q_1{}^2-q_2{}^2+q_3{}^2\end{pmatrix}$$ の各要素

を対比して

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= \frac{\sqrt{d_{11}+d_{22}+d_{33}+1}}{2} \\ q_1 &= \frac{d_{32}-d_{23}}{4q_0} \\ q_2 &= \frac{d_{13}-d_{31}}{4q_0} \\ q_3 &= \frac{d_{21}-d_{12}}{4q_0} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}41)$$

（12） ギブス・ベクター

四元数（2.3.3-5）式において、全体を実数部で割ってベクトル部のみで表した数はギブス・ベクターと呼ばれ、下記のように表される。

$$\mathbf{Q} = \tan\frac{\theta}{2}\underline{e} = \frac{q_1}{q_0}\mathbf{i} + \frac{q_2}{q_0}\mathbf{j} + \frac{q_2}{q_0}\mathbf{k} = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}42)$$

このギブス・ベクターを用いた姿勢計算は、科学衛星打上げ用のMロケットで採用されている。また、H-IIロケットの固体ロケットブースタ（SRB）を 1 段とし、2 段及び 3 段にM-3SIIロケットのそれらを組合わせた格好で開発されたJ-Iロケットにも、そのまま採用された。上式を見れば分かるように、このパラメータは角度 $\theta = 180^\circ$ に特異点を有しているが、これらロケットは発射してから衛星分離までにそんなに回転することはないので、問題は無い。

（13） ケーリー数

四元数（2.3.3-1）式に虚数単位（2.3.3-3）式を代入した数はケーリー数と呼ばれ、下記のように通常の複素数を要素とした2行2列のマトリクスで表される。

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = q_0\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + q_1\begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix} + q_2\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} + q_3\begin{pmatrix}0 & i\\i & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}q_0 + q_1 i & q_2 + q_3 i\\ -q_2 + q_3 i & q_0 - q_1 i\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.3.3\text{-}43)$$

このケーリー数を用いて、（2.3.3-11）式の四元数と同様にベクトルの回転を表すことができるが、複素数演算を行わねばならないので、普通は用いられない。

2.4 座標回転の補正(コーニング補正)

慣性座標系Iを(o−x、y、z)、回転座標系Bを(o−x_B、y_B、z_B)としたとき、回転座標系の回転を表す回転角ベクトルは(2.2.3−7)式に示した回転角速度ベクトルを積分して下記の式で表される。

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \int \dot{\boldsymbol{\theta}} dt = \int \left[\boldsymbol{\omega}_B + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_B\right) + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)\left\{\boldsymbol{\theta}\times\left(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_B\right)\right\}\right]dt \quad \cdots\cdots (2.4\text{−}1)$$

ここで、$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_{x_B}\underline{x}_B + \omega_{y_B}\underline{y}_B + \omega_{z_B}\underline{z}_B$:慣性系に対する回転座標系の回転角速度

ところで、ストラップダウン型の慣性航法においては、ジャイロは回転体に固定されているので、常に回転座標系の各軸方向の角速度を積分した下記で表される値を出力する。

$$\boldsymbol{\theta}_B = \begin{pmatrix} \int \omega_{x_B} dt \\ \int \omega_{y_B} dt \\ \int \omega_{z_B} dt \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.4\text{−}2)$$

よって、ジャイロで計測できない(2.4−1)式の第2項以降のノンコミュタティビティ・レートは、このジャイロ出力信号を用いて計算によって補正しなければならない。このため、(2.4−2)式のジャイロ出力信号は、回転座標系が一定と仮定できる微小時間毎に周期的に取出し、それを用いて回転座標系の回転角速度ω_Bを推定して(2.4−1)式の積分値を求める必要がある。この微小時間をΔtとすれば、ジャイロ出力信号は下記で表される。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} = \int_{T-\Delta t}^{T} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt \quad \cdots\cdots (2.4\text{−}3)$$

このとき、回転座標系の角速度は、現時点(T)とΔt前の時点(T−Δt)の間の平均値として下記で近似される。

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{−}4)$$

また、回転角ベクトル(2.4−1)式の微小時間Δt間の積分は次式で表される。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^{T} \left[\boldsymbol{\omega}_{B(t)} + \frac{1}{2}\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right) + \frac{1}{{\Delta\theta_{(t)}}^2}\left(1-\frac{\Delta\theta_{(t)}\sin\Delta\theta_{(t)}}{2\left(1-\cos\Delta\theta_{(t)}\right)}\right)\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right)\right\}\right]dt$$

ここで$\Delta\theta_{(t)} \ll 1$とすると、上式の第3項の係数は$\frac{1}{{\Delta\theta_{(t)}}^2}\left(1-\frac{\Delta\theta_{(t)}\sin\Delta\theta_{(t)}}{2\left(1-\cos\Delta\theta_{(t)}\right)}\right) \fallingdotseq \frac{1}{12}$であるから

第2項と比較して$\frac{1}{2}\Delta\theta \gg \frac{1}{12}\Delta\theta^2$で微小なので省略でき、上記の回転角ベクトルの積分は下記で求めることができる。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^{T} \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt + \frac{1}{2}\int_{T-\Delta t}^{T} \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right)dt \quad \cdots\cdots (2.4\text{−}5)$$

さらに、上記の第2項における$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}$は下記のようにジャイロ出力信号を用いて近似できる。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)} \fallingdotseq \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(t)} = \int \boldsymbol{\omega}_{B(t)} dt$$

よって、第2項は下記のようにシンプソンの積分公式を用いて求められる。

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(T)} &= \frac{1}{2}\int_{T-\Delta t}^{T}\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right)dt \fallingdotseq \frac{1}{2}\int_{T-\Delta t}^{T}\left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right\}dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta t}{6}\left[\left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t)}\right\} + 4\left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\} + \left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right] \\
&= \frac{\Delta t}{12}\left[4\left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\} + \left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right] \quad \cdots\cdots (2.4\text{−}6)
\end{aligned}$$

従って、(2.4-5)式は(2.4-6)式及び(2.4-3)式を代入して下記のように表される。

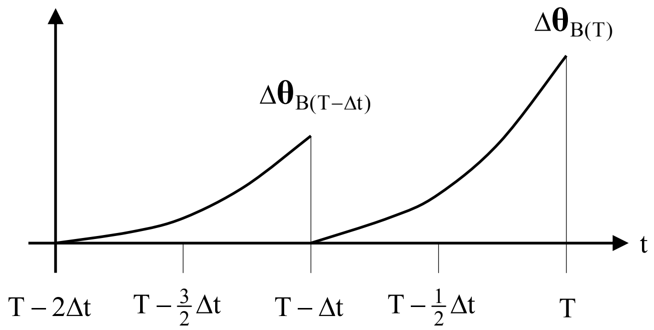
$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T)} = \int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt + \frac{\Delta t}{12}\left[4\left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}+\left\{\left(\int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt\right)\times\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right]$$

$$= \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12}\left[4\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}+\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4\text{-}7)$$

このように回転角ベクトルは、ジャイロで計測できないノンコミュタティビティ・レートの第2項のみ補正することで求めることができる。この補正は一般にコーニング補正と呼ばれ、ジャイロ出力信号のサンプリング周期の取り方によっていくつかの方法が採られる。

(1) 姿勢更新周期と同じ周期で取得したジャイロ信号を用いたコーニング補正

姿勢更新周期をΔtとしたとき、回転座標系の角速度は、現時点(T)とΔt前の時点(T−Δt)でのジャイロ出力信号を用いて下記のように表される。



$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)} \quad \cdots\cdots\cdots (2.4\text{-}8)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.4\text{-}9)$$

上記のΔt間の平均角速度を用いると、Δt前の時点(T−Δt)から現時点(T)までの角速度は下記のように近似して表すことができる。

$$\boldsymbol{\omega}_{B(t)} = \boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B(T-\Delta t)}\left\{t-(T-\Delta t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)}+\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}+\frac{1}{\Delta t}\left\{\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}-\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{3}{2}\Delta t)}\right\}(t-T+\Delta t)$$

$$= \frac{1}{2\Delta t}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right\}+\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t^2}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}-\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}-\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}+\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4\text{-}10)$$

これを積分して

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(t)} = \int_{T-\Delta t}^{t}\left\{\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}-\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}+\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2\Delta t}+\frac{T-\Delta t}{\Delta t}t\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2\Delta t}-\frac{T-\Delta t}{\Delta t}t\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\Bigg|_{T-\Delta t}^{t}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2\Delta t}+\frac{T-\Delta t}{\Delta t}t-\frac{T-\Delta t}{2}+\frac{(T-\Delta t)^2}{2\Delta t}-\frac{(T-\Delta t)^2}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2\Delta t}-\frac{T-\Delta t}{\Delta t}t-\frac{T-\Delta t}{2}-\frac{(T-\Delta t)^2}{2\Delta t}+\frac{(T-\Delta t)^2}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}$$

$$= \frac{t-T+\Delta t}{2\Delta t}\left(1-\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{t-T+\Delta t}{2\Delta t}\left(1+\frac{t-T+\Delta t}{\Delta t}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.4\text{-}11)$$

(2.4-10)式及び(2.4-11)式より

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T)} = -\frac{1}{2\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{3}{2\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4\text{-}12)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{8}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}13)$$

従って、回転角ベクトルは(2.4-7)式に(2.4-13)式、(2.4-9)式及び(2.4-12)式を代入して下記のように求められる。

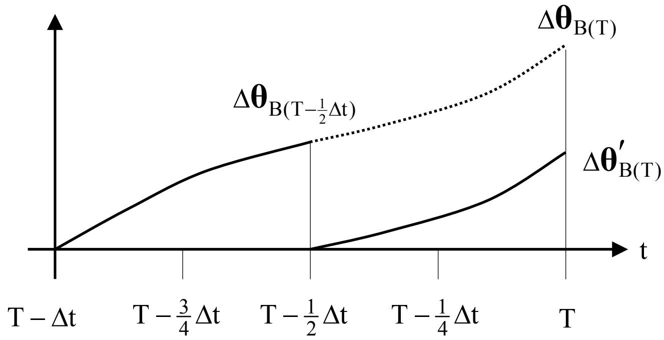
$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T)} &= \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12}\left[4\left\{\left(\frac{1}{8}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{8}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right)\times\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right\} + \left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\left(-\frac{1}{2\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)} + \frac{3}{2\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right)\right\}\right] \\
&= \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} + \frac{\Delta t}{12}\left[\frac{4}{8\Delta t}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right\} - \frac{1}{2\Delta t}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\right\}\right] \\
&= \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} + \frac{1}{12}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right\} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}14)
\end{aligned}$$

(2) 姿勢更新周期の2倍の周期で取得したジャイロ信号を用いたコーニング補正

姿勢更新周期をΔtとしたとき、回転座標系の角速度は、現時点(T)と $\frac{1}{2}\Delta t$ 前の時点($T-\frac{1}{2}\Delta t$)でのジャイロ出力信号を用いて下記のように表される。

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} = \frac{2}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}15)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} = \frac{2}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}16)$$



上記の $\frac{1}{2}\Delta t$ 間の平均角速度を用いると、$\frac{1}{2}\Delta t$ 前の時点($T-\frac{1}{2}\Delta t$)から現時点(T)までの角速度は下記のように近似して表すことができる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{B(t)} &= \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\left\{t-(T-\tfrac{1}{2}\Delta t)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)} + \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)}\right\} + \frac{2}{\Delta t}\left\{\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{4}\Delta t)} - \boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{3}{4}\Delta t)}\right\}(t-T+\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right\} + \frac{4}{\Delta t^2}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)} - \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}(t-T+\tfrac{1}{2}\Delta t) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left\{1-\frac{4}{\Delta t}(t-T+\tfrac{1}{2}\Delta t)\right\}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t}\left\{1+\frac{4}{\Delta t}(t-T+\tfrac{1}{2}\Delta t)\right\}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}17)
\end{aligned}$$

上式より

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} = \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}18)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T)} = -\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{3}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}19)$$

また、Δt間のジャイロ出力信号の角度増分は下記となるから

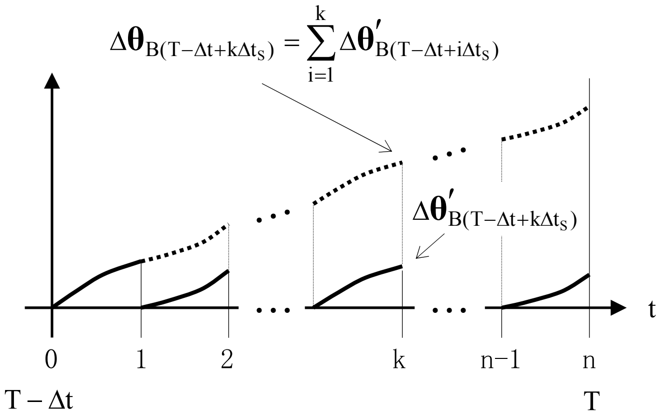
$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} = \Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}20)$$

従って、回転角ベクトルは(2.4-7)式に(2.4-20)式、(2.4-18)式及び(2.4-19)式を代入して下記のように求められる。

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T)} &= \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right) + \frac{\Delta t}{12}\left[4\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\times\left(\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right)\right\}\right. \\
&\qquad \left. + \left\{\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right)\times\left(-\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \frac{3}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right)\right\}\right] \\
&= \left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right\} + \frac{2}{3}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\times\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T)}\right\} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}21)
\end{aligned}$$

（3） 姿勢更新周期の数倍の周期で取得したジャイロ信号を用いたコーニング補正

慣性センサ・ユニット自身がプロセッサを内蔵してドリフト補償等のデータ処理を行う方式の場合、航法計算における姿勢更新周期より早い周期でデータ処理を行うことがある。特に、衝撃からセンサを守るためにショックマウントを介してセンサブロックを取り付けているような場合で、センサブロックが何らかの原因で航法計算における姿勢更新周期より早い周期でコーニング運動する可能性がある場合には、このコーニング周期より早い周期でコーニング補正演算を行う必要がある。



ジャイロ信号のサンプリング周期Δt_Sを姿勢更新周期Δtのn倍の周期としたとき、現時点（T）からΔt前の時点（T－Δt）で決定された姿勢を基準として次の姿勢更新タイミングとなる現時点（T）までの回転角ベクトルを求める。

まず、回転座標系での回転角速度及びそれを積分した角度増分は、時点（T－Δt）からサンプリング周期Δt_Sの整数倍（k）経過した時点で下記のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t+k\Delta t_S)} = \frac{1}{\Delta t_S}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_S)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}22)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t+k\Delta t_S)} \equiv \int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t+k\Delta t_S}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt = \sum_{i=1}^{k}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}23)$$

これらを（2.4−5）式に代入して

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T-\Delta t+k\Delta t_S)} &= \sum_{i=1}^{k}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_S)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T-\Delta t+i\Delta t_S)} \times \Delta t_S\boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)}\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_S)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T-\Delta t+i\Delta t_S)} \times \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)}\right\} \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}24)\end{aligned}$$

従って、回転角ベクトルは上式を下記の漸化式に書き換えて求めることができる。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_i = \left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)}\right\} + \frac{1}{2}\left[\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)}\right\} \times \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)}\right] \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}25)$$

ここで、$\Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$

i＝1～n

$$n = \frac{\Delta t}{\Delta t_S}$$

また、コーニング補正項における回転角ベクトル $\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}$ を（2.4−6）式と同様に、ジャイロ出力信号を用いて近似すると下記で求めることができる。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(T)} = \sum_{i=1}^{n}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\sum_{i=1}^{k}\Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+i\Delta t_S)}\right\} \times \Delta\boldsymbol{\theta}'_{B(T-\Delta t+k\Delta t_S)}\right] \quad \cdots\cdots (2.4\text{-}26)$$

2.5 姿勢計算誤差及びその改良法

2.5.1 姿勢計算誤差の表現

基準座標系Iを(o-x、y、z)とし、回転座標系Bを(o-x_B、y_B、z_B)としたとき、基準座標系から見た回転座標系の方向余弦マトリクス及び四元数を下記のように表す。

$$\mathbf{D}_B^I = \begin{pmatrix} \underline{x}_B & \underline{y}_B & \underline{z}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}1)$$

$$\mathbf{Q}_B^I = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}2)$$

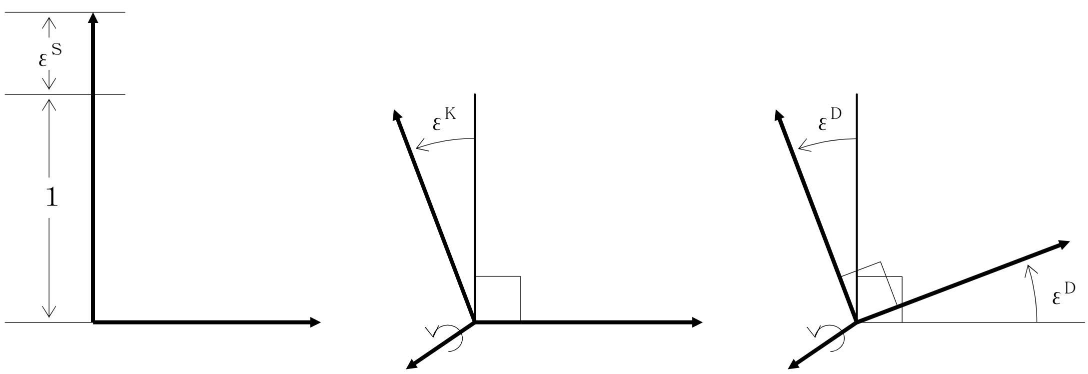
また、航法計算によって得られた誤差を含んでいる姿勢を下記のように表す。

$$\tilde{\mathbf{D}}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{x}}_B & \tilde{\underline{y}}_B & \tilde{\underline{z}}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_{13} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \tilde{d}_{23} \\ \tilde{d}_{31} & \tilde{d}_{32} & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}3)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_B^I = \begin{pmatrix} \tilde{q}_0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}4)$$

このとき、姿勢誤差は下記の3種類の誤差で表現される。

・ スケール誤差
・ スキュー誤差
・ ドリフト誤差



(1) スケール誤差　(2) スキュー誤差　(3) ドリフト誤差

図2.5-1　姿勢計算誤差

(1) スケール誤差

回転座標系の各軸単位ベクトル及び四元数の大きさは1でなければならないから、1からのずれをスケール誤差と呼び、下記のように表される。

$$\varepsilon_{D_x}^s = \left|\tilde{\underline{x}}_B\right| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{11}^{\,2} + \tilde{d}_{21}^{\,2} + \tilde{d}_{31}^{\,2}} - 1 \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}5)$$

$$\varepsilon_{D_y}^s = \left|\tilde{\underline{y}}_B\right| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{12}^{\,2} + \tilde{d}_{22}^{\,2} + \tilde{d}_{32}^{\,2}} - 1 \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}6)$$

$$\varepsilon_{D_z}^{s} = \left|\tilde{\underline{z}}_B\right| - 1 = \sqrt{\tilde{d}_{13}{}^2 + \tilde{d}_{23}{}^2 + \tilde{d}_{33}{}^2} - 1 \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}7)$$

ここで平方根の近似解は$x=\sqrt{N}$より、$f_{(x)} = x^2 - N = 0$にニュートン・ラプソンの逐次近似法を適用して次式で表される。

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f_{(x_{n-1})}}{f'_{(x_{n-1})}} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - N}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right) \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}8)$$

よって、(2.5.1-5)～(2.5.1-7)式は次式で近似される。

$$\varepsilon_{D_x}^{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{d}_{11}{}^2 + \tilde{d}_{21}{}^2 + \tilde{d}_{31}{}^2}{1} + 1\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{d}_{11}{}^2 + \tilde{d}_{21}{}^2 + \tilde{d}_{31}{}^2 - 1\right) \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}9)$$

$$\varepsilon_{D_y}^{s} = \frac{1}{2}\left(\tilde{d}_{12}{}^2 + \tilde{d}_{22}{}^2 + \tilde{d}_{32}{}^2 - 1\right) \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}10)$$

$$\varepsilon_{D_z}^{s} = \frac{1}{2}\left(\tilde{d}_{13}{}^2 + \tilde{d}_{23}{}^2 + \tilde{d}_{33}{}^2 - 1\right) \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}11)$$

同様に、四元数のスケール誤差は下記で表される。

$$\varepsilon_{q}^{s} = \sqrt{\tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 + \tilde{q}_2{}^2 + \tilde{q}_3{}^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 + \tilde{q}_2{}^2 + \tilde{q}_3{}^2 - 1\right) \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}12)$$

ところで、四元数を用いて方向余弦マトリクスは(2.3.3-15)式のように表せるから、これを(2.5.1-5)式～(2.5.1-7)式に代入すると、方向余弦マトリクスと同様のスケール誤差が得られる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Q_x}^{s} &= \sqrt{\left(\tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 - \tilde{q}_2{}^2 - \tilde{q}_3{}^2\right)^2 + \left\{2\left(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_0\tilde{q}_3\right)\right\}^2 + \left\{2\left(\tilde{q}_1\tilde{q}_3 - \tilde{q}_0\tilde{q}_2\right)\right\}^2} - 1 \\
&= \left\{\sqrt{\begin{aligned}&\tilde{q}_0{}^4 + \tilde{q}_1{}^4 + \tilde{q}_2{}^4 + \tilde{q}_3{}^4 + \tilde{q}_0{}^2\left(\tilde{q}_1{}^2 - \tilde{q}_2{}^2 - \tilde{q}_3{}^2\right) + \tilde{q}_1{}^2\left(\tilde{q}_0{}^2 - \tilde{q}_2{}^2 - \tilde{q}_3{}^2\right) - \tilde{q}_2{}^2\left(\tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 - \tilde{q}_3{}^2\right)\\ &-\tilde{q}_3{}^2\left(\tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 - \tilde{q}_2{}^2\right) + 4\left(\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_2{}^2 + 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_3{}^2\right) + 4\left(\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_3{}^2 - 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_2{}^2\right)\end{aligned}}\right\} - 1 \\
&= \left\{\sqrt{\begin{aligned}&\tilde{q}_0{}^4 + \tilde{q}_1{}^4 + \tilde{q}_2{}^4 + \tilde{q}_3{}^4 + 2\tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_1{}^2 - 2\tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_2{}^2 - 2\tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_3{}^2 - 2\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_2{}^2 - 2\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_3{}^2 + 2\tilde{q}_2{}^2\tilde{q}_3{}^2\\ &+4\left(\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_2{}^2 + 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_3{}^2\right) + 4\left(\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_3{}^2 - 2\tilde{q}_0\tilde{q}_1\tilde{q}_2\tilde{q}_3 + \tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_2{}^2\right)\end{aligned}}\right\} - 1 \\
&= \sqrt{\tilde{q}_0{}^4 + \tilde{q}_1{}^4 + \tilde{q}_2{}^4 + \tilde{q}_3{}^4 + 2\tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_1{}^2 + 2\tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_2{}^2 + 2\tilde{q}_0{}^2\tilde{q}_3{}^2 + 2\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_2{}^2 + 2\tilde{q}_1{}^2\tilde{q}_3{}^2 + 2\tilde{q}_2{}^2\tilde{q}_3{}^2} - 1 \\
&= \sqrt{\left(\tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 + \tilde{q}_2{}^2 + \tilde{q}_3{}^2\right)^2} - 1 = \tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 + \tilde{q}_2{}^2 + \tilde{q}_3{}^2 - 1
\end{aligned}$$

他の軸も同様に求めると、それらは全て等しく、下記で表される。

$$\varepsilon_{Q_x}^{s} = \varepsilon_{Q_y}^{s} = \varepsilon_{Q_z}^{s} = \tilde{q}_0{}^2 + \tilde{q}_1{}^2 + \tilde{q}_2{}^2 + \tilde{q}_3{}^2 - 1 \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}13)$$

(2) スキュー誤差

回転座標系の各軸単位ベクトルは互いに直交していなければならないが、この直交条件からのずれをスキュー誤差と呼び、下記のように表される。

$$\varepsilon_{D_x}^{k} = \sin^{-1}\left(\tilde{\underline{y}}_B \cdot \tilde{\underline{z}}_B\right) = \sin^{-1}\left(\tilde{d}_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}\tilde{d}_{33}\right) \fallingdotseq \tilde{d}_{12}\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{22}\tilde{d}_{23} + \tilde{d}_{32}\tilde{d}_{33} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}14)$$

$$\varepsilon_{D_y}^{k} = \sin^{-1}\left(\tilde{\underline{z}}_B \cdot \tilde{\underline{x}}_B\right) = \sin^{-1}\left(\tilde{d}_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}\tilde{d}_{31}\right) \fallingdotseq \tilde{d}_{13}\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{23}\tilde{d}_{21} + \tilde{d}_{33}\tilde{d}_{31} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}15)$$

$$\varepsilon_{D_z}^{k} = \sin^{-1}\left(\tilde{\underline{x}}_B \cdot \tilde{\underline{y}}_B\right) = \sin^{-1}\left(\tilde{d}_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}\tilde{d}_{32}\right) \fallingdotseq \tilde{d}_{11}\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{21}\tilde{d}_{22} + \tilde{d}_{31}\tilde{d}_{32} \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}16)$$

四元数は1つのベクトル(オイラー軸)しか持たないので、スキュー誤差は発生しない。

$$\varepsilon_{Q_x}^{k} = \varepsilon_{Q_y}^{k} = \varepsilon_{Q_z}^{k} = 0 \quad \cdots\cdots (2.5.1\text{-}17)$$

（3）ドリフト誤差

計算して得られた姿勢と真の姿勢との間に回転角が存在する場合、これをドリフト誤差と呼び、下記のように表される。

$$\mathbf{D}_B^B=\left(\mathbf{D}_B^I\right)^T\cdot\tilde{\mathbf{D}}_B^I=\begin{pmatrix}\tilde{\underline{x}}_B\cdot\underline{x}_B & \tilde{\underline{y}}_B\cdot\underline{x}_B & \tilde{\underline{z}}_B\cdot\underline{x}_B\\ \tilde{\underline{x}}_B\cdot\underline{y}_B & \tilde{\underline{y}}_B\cdot\underline{y}_B & \tilde{\underline{z}}_B\cdot\underline{y}_B\\ \tilde{\underline{x}}_B\cdot\underline{z}_B & \tilde{\underline{y}}_B\cdot\underline{z}_B & \tilde{\underline{z}}_B\cdot\underline{z}_B\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}1 & -\varepsilon_{D_z}^d & \varepsilon_{D_y}^d\\ \varepsilon_{D_z}^d & 1 & -\varepsilon_{D_x}^d\\ -\varepsilon_{D_y}^d & \varepsilon_{D_x}^d & 1\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5.1\text{-}18)$$

としたとき、ドリフト誤差は

$$\varepsilon_{D_x}^d=\frac{1}{2}\left(\tilde{\underline{y}}_B\cdot\underline{z}_B-\tilde{\underline{z}}_B\cdot\underline{y}_B\right)=\frac{1}{2}\left(\tilde{d}_{12}d_{13}-d_{12}\tilde{d}_{13}+\tilde{d}_{22}d_{23}-d_{22}\tilde{d}_{23}+\tilde{d}_{32}d_{33}-d_{32}\tilde{d}_{33}\right)\quad\cdots\cdots(2.5.1\text{-}19)$$

$$\varepsilon_{D_y}^d=\frac{1}{2}\left(\tilde{\underline{z}}_B\cdot\underline{x}_B-\tilde{\underline{x}}_B\cdot\underline{z}_B\right)=\frac{1}{2}\left(\tilde{d}_{13}d_{11}-d_{13}\tilde{d}_{11}+\tilde{d}_{23}d_{21}-d_{23}\tilde{d}_{21}+\tilde{d}_{33}d_{31}-d_{33}\tilde{d}_{31}\right)\quad\cdots\cdots(2.5.1\text{-}20)$$

$$\varepsilon_{D_z}^d=\frac{1}{2}\left(\tilde{\underline{x}}_B\cdot\underline{y}_B-\tilde{\underline{y}}_B\cdot\underline{x}_B\right)=\frac{1}{2}\left(\tilde{d}_{11}d_{12}-d_{11}\tilde{d}_{12}+\tilde{d}_{21}d_{22}-d_{21}\tilde{d}_{22}+\tilde{d}_{31}d_{32}-d_{31}\tilde{d}_{32}\right)\quad\cdots\cdots(2.5.1\text{-}21)$$

四元数のドリフト誤差は、(2.5.1-18)式と同様な回転を表す四元数を以下のように定義して

$$\mathbf{Q}_B^B=\left(\mathbf{Q}_B^I\right)^*\otimes\tilde{\mathbf{Q}}_B^I=\begin{pmatrix}q_0\\-q_1\\-q_2\\-q_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\tilde{q}_0\\\tilde{q}_1\\\tilde{q}_2\\\tilde{q}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0 & \begin{pmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{pmatrix}\\ -\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} & q_0\mathbf{1}-\left[\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\times\right]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{q}_0\\\tilde{q}_1\\\tilde{q}_2\\\tilde{q}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0\tilde{q}_0+q_1\tilde{q}_1+q_2\tilde{q}_2+q_3\tilde{q}_3\\ q_0\tilde{q}_1-q_1\tilde{q}_0-q_2\tilde{q}_3+q_3\tilde{q}_2\\ q_0\tilde{q}_2-q_2\tilde{q}_0-q_3\tilde{q}_1+q_1\tilde{q}_3\\ q_0\tilde{q}_3-q_3\tilde{q}_0-q_1\tilde{q}_2+q_2\tilde{q}_1\end{pmatrix}$$

$$=\cos\frac{\varepsilon_Q^d}{2}+\sin\frac{\varepsilon_Q^d}{2}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d}{\varepsilon_Q^d}\right)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\varepsilon_Q^d}{2}\\ \dfrac{1}{\varepsilon_Q^d}\sin\dfrac{\varepsilon_Q^d}{2}\begin{pmatrix}\varepsilon_{Q_x}^d\\\varepsilon_{Q_y}^d\\\varepsilon_{Q_z}^d\end{pmatrix}\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5.1\text{-}22)$$

ここで、$\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d=\begin{pmatrix}\varepsilon_{Q_x}^d\\\varepsilon_{Q_y}^d\\\varepsilon_{Q_z}^d\end{pmatrix}$

$$\varepsilon_Q^d=\left|\boldsymbol{\varepsilon}_Q^d\right|=\sqrt{\varepsilon_{Q_x}^{d\ 2}+\varepsilon_{Q_y}^{d\ 2}+\varepsilon_{Q_z}^{d\ 2}}$$

上式において$\varepsilon_Q^d\ll 1$であるから下記が成立する。

$$\frac{1}{\varepsilon_Q^d}\sin\frac{\varepsilon_Q^d}{2}\fallingdotseq\frac{1}{\varepsilon_Q^d}\left\{\frac{\varepsilon_Q^d}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\varepsilon_Q^d}{2}\right)^3\right\}=\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_Q^{d\ 2}}{48}\fallingdotseq\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5.1\text{-}23)$$

従って、四元数のドリフト誤差は下記のように表される。

$$\varepsilon_{Q_x}^d=2\left(q_0\tilde{q}_1-q_1\tilde{q}_0-q_2\tilde{q}_3+q_3\tilde{q}_2\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5.1\text{-}24)$$

$$\varepsilon_{Q_y}^d=2\left(q_0\tilde{q}_2-q_2\tilde{q}_0-q_3\tilde{q}_1+q_1\tilde{q}_3\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5.1\text{-}25)$$

$$\varepsilon_{Q_z}^d=2\left(q_0\tilde{q}_3-q_3\tilde{q}_0-q_1\tilde{q}_2+q_2\tilde{q}_1\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5.1\text{-}26)$$

2.5.2 打ち切り誤差

航法計算において、角度増分を用いて姿勢更新を行う際に角度増分の正弦及び余弦を求める必要があるが、正弦及び余弦の計算はテーラー級数に展開して有限次数で打ち切るため、打ち切り誤差が生ずる。

方向余弦マトリクス法では(2.3.1-10)式で姿勢が更新され、角度増分の正弦及び余弦を含む係数は(2.3.1-11)式及び(2.3.1-12)式で表される。また、四元数法では(2.3.3-38)式で姿勢が更新され、角度増分の正弦及び余弦を含む係数は(2.3.3-39)式及び(2.3.3-40)式で表される。これらは次数nで打ち切ると、無限次数まで求めたものに比較して下記の打ち切り誤差を持つ。

$$\varepsilon s_n = s_n - s_\infty \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}1)$$

$$\varepsilon c_n = c_n - c_\infty \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}2)$$

ここで、s_n, c_n ：打ち切り次数nまで求めた係数

s_∞, c_∞ ：無限次数まで求めた係数

(1) スケール誤差

方向余弦マトリクス法では、(2.5.1-9)式～(2.5.1-11)式に(2.3.1-10)式の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を代入して、次数打ち切りによるスケール誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon^s_{D_x} &= \frac{1}{2}\left[\left\{1 - c_n\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\right\}^2 + \left\{c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_y + s_n\Delta\theta_z\right\}^2 + \left\{c_n\Delta\theta_x\Delta\theta_z - s_n\Delta\theta_y\right\}^2 - 1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{c_n{}^2\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)^2 + c_n{}^2\Delta\theta_x{}^2\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right) + s_n{}^2\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right) - 2c_n\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left\{c_n{}^2\left(\Delta\theta_x{}^2 + \Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right) + s_n{}^2 - 2c_n\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left(c_n{}^2\Delta\theta^2 + s_n{}^2 - 2c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}3)
\end{aligned}$$

上式において、次数nを無限大とすると誤差はゼロとなるから下記が成り立つ。

$$c_\infty{}^2\Delta\theta^2 + s_\infty{}^2 - 2c_\infty = 0 \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}4)$$

従って、(2.5.2-3)式に(2.5.2-1)式及び(2.5.2-2)式を代入し、さらに(2.5.2-4)式を代入した後で打ち切り誤差の高次項を省略すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon^s_{D_x} &= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left\{\left(c_\infty + \varepsilon c_n\right)^2\Delta\theta^2 + \left(s_\infty + \varepsilon s_n\right)^2 - 2\left(c_\infty + \varepsilon c_n\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left\{\left(c_\infty{}^2\Delta\theta^2 + s_\infty{}^2 - 2c_\infty\right) + 2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2s_\infty\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n + \varepsilon c_n{}^2\Delta\theta^2 + \varepsilon s_n{}^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left(2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2s_\infty\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n\right)
\end{aligned}$$

さらに上式に(2.3.1-11)式及び(2.3.1-12)式を代入して高次項を省略すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon^s_{D_x} &= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left(2\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left\{2\frac{1-\left(1-\dfrac{\Delta\theta^2}{2}+\cdots\right)}{\Delta\theta^2}\varepsilon c_n\Delta\theta^2 + 2\frac{\left(\Delta\theta-\dfrac{\Delta\theta^3}{3!}+\cdots\right)}{\Delta\theta}\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Delta\theta_y{}^2 + \Delta\theta_z{}^2\right)\left\{2\left(\frac{\Delta\theta^2}{2}-\cdots\right)\varepsilon c_n + 2\left(1-\frac{\Delta\theta^2}{3!}+\cdots\right)\varepsilon s_n - 2\varepsilon c_n\right\}
\end{aligned}$$

$$=\left(\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2\right)\left(\varepsilon s_n-\varepsilon c_n\right) \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}5)$$

$$\varepsilon^s_{D_y}=\left(\Delta\theta_z{}^2+\Delta\theta_x{}^2\right)\left(\varepsilon s_n-\varepsilon c_n\right) \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}6)$$

$$\varepsilon^s_{D_z}=\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2\right)\left(\varepsilon s_n-\varepsilon c_n\right) \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}7)$$

同様に、四元数法では(2.5.1-13)式に(2.3.3-38)式における更新マトリクス(推移マトリクス)に対応する(2.3.3-37)式の要素を代入して、次数打ち切りによるスケール誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon^s_{Q_x}=\varepsilon^s_{Q_y}=\varepsilon^s_{Q_z}&=c_n{}^2+s_n{}^2\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2\right)-1=c_n{}^2+s_n{}^2\Delta\theta^2-1\\
&=\left(c_\infty+\varepsilon c_n\right)^2+\left(s_\infty+\varepsilon s_n\right)^2\Delta\theta^2-1=\left(c_\infty{}^2+s_\infty{}^2\Delta\theta^2-1\right)+\varepsilon c_n{}^2+\varepsilon s_n{}^2\Delta\theta^2+2c_\infty\varepsilon c_n+2s_\infty\varepsilon s_n\Delta\theta^2\\
&=2c_n\varepsilon c_n+2\frac{1}{\Delta\theta}s_n\,\varepsilon s_n\Delta\theta^2=2\cos\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon c_n+2\frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon s_n\Delta\theta^2\\
&=2\varepsilon c_n+\varepsilon s_n\Delta\theta^2 \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}8)
\end{aligned}$$

(2) スキュー誤差

方向余弦マトリクス法では、(2.5.1-14)式～(2.5.1-16)式に(2.3.1-10)式の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を代入して、次数打ち切りによるスキュー誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon^k_{D_x}&=\left(c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_x-s_n\Delta\theta_z\right)\left(c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_x+s_n\Delta\theta_y\right)+\left\{1-c_n\left(\Delta\theta_z{}^2+\Delta\theta_x{}^2\right)\right\}\left(c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_y-s_n\Delta\theta_x\right)\\
&\quad+\left(c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_z+s_n\Delta\theta_x\right)\left\{1-c_n\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2\right)\right\}\\
&=c_n{}^2\Delta\theta_x{}^2\Delta\theta_y\Delta\theta_z-s_n{}^2\Delta\theta_y\Delta\theta_z+s_nc_n\Delta\theta_x\left(\Delta\theta_y{}^2-\Delta\theta_z{}^2\right)+c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_y-c_n{}^2\left(\Delta\theta_z{}^2+\Delta\theta_x{}^2\right)\Delta\theta_z\Delta\theta_y-s_n\Delta\theta_x\\
&\quad+s_nc_n\Delta\theta_x\left(\Delta\theta_z{}^2+\Delta\theta_x{}^2\right)+c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_z+s_n\Delta\theta_x-c_n{}^2\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2\right)\Delta\theta_y\Delta\theta_z-s_nc_n\Delta\theta_x\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2\right)\\
&=-s_n{}^2\Delta\theta_y\Delta\theta_z+2c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_z-c_n{}^2\left(\Delta\theta_x{}^2+\Delta\theta_y{}^2+\Delta\theta_z{}^2\right)\Delta\theta_y\Delta\theta_z\\
&=-\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left(s_n{}^2-2c_n+c_n{}^2\Delta\theta^2\right)\\
&=-\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left\{\left(s_\infty+\varepsilon s_n\right)^2-2\left(c_\infty+\varepsilon c_n\right)+\left(c_\infty+\varepsilon c_n\right)^2\Delta\theta^2\right\}\\
&=-\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left\{\left(s_\infty{}^2-2c_\infty+c_\infty{}^2\Delta\theta^2\right)+2s_\infty\varepsilon s_n-2\varepsilon c_n+2c_\infty\varepsilon c_n\Delta\theta^2+\varepsilon c_n{}^2\Delta\theta^2\right\}\\
&=-\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left(2s_\infty\varepsilon s_n-2\varepsilon c_n\right)\\
&=-\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left(2\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\varepsilon s_n-2\varepsilon c_n\right)=-\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left(2\frac{\Delta\theta-\dfrac{\Delta\theta^3}{3!}+\cdots}{\Delta\theta}\varepsilon s_n-2\varepsilon c_n\right)\\
&=-2\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left(\varepsilon s_n-\varepsilon c_n\right) \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}9)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^k_{D_y}=-2\Delta\theta_z\Delta\theta_x\left(\varepsilon s_n-\varepsilon c_n\right) \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}10)$$

$$\varepsilon^k_{D_z}=-2\Delta\theta_x\Delta\theta_y\left(\varepsilon s_n-\varepsilon c_n\right) \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}11)$$

四元数法ではスキュー誤差はない。

$$\varepsilon^k_{Q_x}=\varepsilon^k_{Q_y}=\varepsilon^k_{Q_z}=0 \quad\cdots\cdots(2.5.2\text{-}12)$$

（3）ドリフト誤差

方向余弦マトリクス法では、(2.5.1-19)式～(2.5.1-21)式に(2.3.1-10)式の更新マトリクス(推移マトリクス)の要素を次数n及び次数無限大として代入すると、打ち切り次数nによるドリフト誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{D_x}^{d} &= \frac{1}{2}\Big[\left(c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_x - s_n\Delta\theta_z\right)\left(c_\infty\Delta\theta_z\Delta\theta_x + s_\infty\Delta\theta_y\right) - \left(c_\infty\Delta\theta_y\Delta\theta_x - s_\infty\Delta\theta_z\right)\left(c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_x + s_n\Delta\theta_y\right) \\
&\quad + \left\{1 - c_n\left(\Delta\theta_z{}^2 + \Delta\theta_x{}^2\right)\right\}\left(c_\infty\Delta\theta_z\Delta\theta_y - s_\infty\Delta\theta_x\right) - \left\{1 - c_\infty\left(\Delta\theta_z{}^2 + \Delta\theta_x{}^2\right)\right\}\left(c_n\Delta\theta_z\Delta\theta_y - s_n\Delta\theta_x\right) \\
&\quad + \left(c_n\Delta\theta_y\Delta\theta_z + s_n\Delta\theta_x\right)\left\{1 - c_\infty\left(\Delta\theta_x{}^2 + \Delta\theta_y{}^2\right)\right\} - \left(c_\infty\Delta\theta_y\Delta\theta_z + s_\infty\Delta\theta_x\right)\left\{1 - c_n\left(\Delta\theta_x{}^2 + \Delta\theta_y{}^2\right)\right\}\Big] \\
&= \Delta\theta_x\left\{s_n - s_\infty + \Delta\theta^2\left(c_n s_\infty - s_n c_\infty\right)\right\} \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}13)
\end{aligned}$$

上式に(2.5.2-1)～(2.5.2-2)式を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{D_x}^{d} &= \Delta\theta_x\left[\left(s_\infty + \varepsilon s_n\right) - s_\infty + \Delta\theta^2\left\{\left(c_\infty + \varepsilon c_n\right)s_\infty - \left(s_\infty + \varepsilon s_n\right)c_\infty\right\}\right] \\
&= \Delta\theta_x\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2 s_\infty \varepsilon c_n\right) \\
&= \Delta\theta_x\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\varepsilon c_n\right) = \Delta\theta_x\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2\frac{\Delta\theta - \dfrac{\Delta\theta^3}{3!} + \cdots}{\Delta\theta}\varepsilon c_n\right) \\
&= \Delta\theta_x\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2\varepsilon c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{D_y}^{d} &= \Delta\theta_y\left\{s_n - s_\infty + \Delta\theta^2\left(c_n s_\infty - s_n c_\infty\right)\right\} \\
&= \Delta\theta_y\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2\varepsilon c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{D_z}^{d} &= \Delta\theta_z\left\{s_n - s_\infty + \Delta\theta^2\left(c_n s_\infty - s_n c_\infty\right)\right\} \\
&= \Delta\theta_z\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2\varepsilon c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}16)
\end{aligned}$$

同様に、四元数法では(2.5.1-24)式～(2.5.1-26)式に(2.3.3-38)式における更新マトリクス(推移マトリクス)に対応する(2.3.3-37)式の要素を次数n及び次数無限大として代入すると、打ち切り次数nによるドリフト誤差は下記のように表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Q_x}^{d} &= 2\left(c_\infty\Delta\theta_x s_n - \Delta\theta_x s_\infty c_n - \Delta\theta_y s_\infty\Delta\theta_z s_n + \Delta\theta_z s_\infty\Delta\theta_y s_n\right) \\
&= 2\Delta\theta_x\left\{c_\infty s_n - s_\infty c_n\right\} \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}17)
\end{aligned}$$

上式に(2.5.2-1)～(2.5.2-2)式を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Q_x}^{d} &= 2\Delta\theta_x\left\{c_\infty\left(s_\infty + \varepsilon s_n\right) - s_\infty\left(c_\infty + \varepsilon c_n\right)\right\} \\
&= 2\left\{\cos\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon s_n\Delta\theta_x - \frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\varepsilon c_n\Delta\theta_x\right\} \\
&= \Delta\theta_x\left(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Q_y}^{d} &= 2\Delta\theta_y\left\{c_\infty s_n - s_\infty c_n\right\} \\
&= \Delta\theta_y\left(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Q_z}^{d} &= 2\Delta\theta_z\left\{c_\infty s_n - s_\infty c_n\right\} \\
&= \Delta\theta_z\left(2\varepsilon s_n - \varepsilon c_n\right) \quad \cdots\cdots (2.5.2\text{-}20)
\end{aligned}$$

2.5.3 姿勢計算誤差の改良法

角度増分の正弦及び余弦の計算は、テーラー級数に展開して下記のように表される。

$$\sin\Delta\theta = \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} - \frac{\Delta\theta^7}{7!} + \cdots \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}1)$$

$$\cos\Delta\theta = 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} - \frac{\Delta\theta^6}{6!} + \cdots \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}2)$$

そこで、方向余弦マトリクス法（2.3.1-11）式～（2.3.1-12）式及び四元数法（2.3.3-39）式～（2.3.3-40）式は、上記 $\Delta\theta$ のn乗まで用いた場合をn次の近似次数とすると、下記のように表される。

表2.5-1　姿勢更新における近似係数

次数		0次	1次	2次	3次	4次	5次	6次
$\sin\Delta\theta$			$\Delta\theta$		$-\frac{\Delta\theta^3}{3!}$		$\frac{\Delta\theta^5}{5!}$	
$\cos\Delta\theta$		1		$-\frac{\Delta\theta^2}{2!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{4!}$		$-\frac{\Delta\theta^6}{6!}$
方向余弦マトリクス法	$s_n = \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$		1		$-\frac{\Delta\theta^2}{3!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{5!}$	
	$c_n = \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}$	0		$\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta\theta^2}{4!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{6!}$
四元数法	$s_n = \frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{\Delta\theta^2}{2^3\cdot 3!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{2^5\cdot 5!}$	
	$c_n = \cos\frac{\Delta\theta}{2}$	1		$-\frac{\Delta\theta^2}{2^2\cdot 2!}$		$\frac{\Delta\theta^4}{2^4\cdot 4!}$		$-\frac{\Delta\theta^6}{2^6\cdot 6!}$

上記の表に示したようにn次で打ち切った場合は、2.5.2項に示した打ち切り誤差が発生する。このうち、スケール誤差は下記のように正規化することで、スキュー誤差は直交化することで除去できる。

$$\underline{x}_B = \frac{\tilde{\underline{x}}_B}{\left|\tilde{\underline{x}}_B\right|} = \frac{\tilde{\underline{x}}_B}{\sqrt{\tilde{\underline{x}}_B\cdot\tilde{\underline{x}}_B}} \fallingdotseq \frac{\tilde{\underline{x}}_B}{\frac{1}{2}\left\{\left(\tilde{\underline{x}}_B\cdot\tilde{\underline{x}}_B\right)+1\right\}} = \frac{\tilde{\underline{x}}_B}{1+\frac{\left(\tilde{\underline{x}}_B\cdot\tilde{\underline{x}}_B\right)-1}{2}}$$

上式に $\frac{1}{1+\varepsilon} \fallingdotseq 1-\varepsilon$（但し、$\varepsilon \ll 1$）を適用して

$$\underline{x}_B \fallingdotseq \left\{1-\frac{\left(\tilde{\underline{x}}_B\cdot\tilde{\underline{x}}_B\right)-1}{2}\right\}\tilde{\underline{x}}_B = \left\{\frac{3-\left(\tilde{\underline{x}}_B\cdot\tilde{\underline{x}}_B\right)}{2}\right\}\tilde{\underline{x}}_B \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}3)$$

$$\underline{z}_B = \frac{\underline{x}_B\times\tilde{\underline{y}}_B}{\left|\underline{x}_B\times\tilde{\underline{y}}_B\right|} = \left\{\frac{3-\left(\underline{x}_B\times\tilde{\underline{y}}_B\right)\cdot\left(\underline{x}_B\times\tilde{\underline{y}}_B\right)}{2}\right\}\left(\underline{x}_B\times\tilde{\underline{y}}_B\right) \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}4)$$

$$\underline{y}_B = \underline{z}_B\times\underline{x}_B \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}5)$$

$$\mathbf{Q}_B^I = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\left|\tilde{\mathbf{Q}}_B^I\right|} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\sqrt{\tilde{q}_0^2+\tilde{q}_1^2+\tilde{q}_2^2+\tilde{q}_3^2}} \fallingdotseq \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_B^I}{\frac{1}{2}\left(\tilde{q}_0^2+\tilde{q}_1^2+\tilde{q}_2^2+\tilde{q}_3^2+1\right)}$$

$$= \tilde{\mathbf{Q}}_B^I\,\frac{3-\left(\tilde{q}_0^2+\tilde{q}_1^2+\tilde{q}_2^2+\tilde{q}_3^2\right)}{2} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}6)$$

ドリフト誤差は、（2.5.2-13）から（2.5.2-16）式及び（2.5.2-17）～（2.5.2-20）式に示した打ち切り誤差

が小さくなるように、上記の表に示した係数を調整することで改良することが出来る。

（1） 方向余弦マトリクス(参考)

方向余弦マトリクス法は(2.5.2-13)～(2.5.2-16)式のようにドリフト誤差が表されるから、これらを再掲すると、下記のように表される。

$$\varepsilon_{D_P}^{d} = \Delta\theta_P \left\{ s_n - s_\infty + \Delta\theta^2 \left(c_n s_\infty - s_n c_\infty \right) \right\} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}7)$$

ここで、P=x、y、z

上式で近似次数が2次の場合は、s_n、s_∞ 及び c_∞ にそれぞれの式を代入し、その結果がゼロになるように c_n の式を下記のように決定すればよい。

$$\varepsilon_{D_P}^{d} = \Delta\theta_P \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right) + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right) - 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \cdots \right) \right\} \right] = 0$$

$$c_n = \left[-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right) \right\} + 1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \cdots \right) \right] \Bigg/ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{\Delta\theta^2}{30} + \cdots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \cdots} \fallingdotseq \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}8)$$

同様に、近似次数が4次の場合は

$$\varepsilon_{D_P}^{d} = \Delta\theta_P \left[\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right) + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \cdots \right) \right\} \right] = 0$$

$$c_n = \left[-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right) \right\} + \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \cdots \right) \right] \Bigg/ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{7\Delta\theta^2}{60} + \cdots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \cdots} \fallingdotseq \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{30} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}9)$$

さらに、近似次数が6次の場合は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D_P}^{d} = \Delta\theta_P \Bigg[& \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \cdots \right) \\ & + \Delta\theta^2 \left\{ c_n \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} - \cdots \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{120 \times 6} - \cdots \right) \right\} \Bigg] = 0 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{-\frac{1}{\Delta\theta^2} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) - \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \cdots \right) \right\} + \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{120 \times 6} - \cdots \right)}{\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} + \cdots \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{31\Delta\theta^4}{2520} + \cdots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120} - \frac{\Delta\theta^6}{120 \times 42} - \cdots} \fallingdotseq \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{840} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}10)$$

（2）四元数

四元数法は(2.5.2-17)～(2.5.2-20)式のようにドリフト誤差が表されるから、これらを再掲すると、下記のように表される。

$$\varepsilon^{d}_{Q_P} = 2\Delta\theta_P \left\{ c_\infty s_n - s_\infty c_n \right\} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}11)$$

ここで、P=x、y、z

上式で近似次数が2次の場合は、s_n、s_∞ 及び c_∞ にそれぞれの式を代入し、その結果がゼロになるように c_n の式を下記のように決定すればよい。

$$\varepsilon^{d}_{Q_P} = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \cdots\right)\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \cdots\right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \cdots\right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \cdots} = \frac{1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \cdots}{1 - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \cdots} \fallingdotseq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{12} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}14)$$

同様に、近似次数が4次の場合は

$$\varepsilon^{d}_{Q_P} = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \cdots\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \cdots\right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48}\right)\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \cdots\right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \cdots} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{12} + \frac{\Delta\theta^4}{256} - \cdots}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \cdots} \fallingdotseq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{480} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}15)$$

さらに、近似次数が6次の場合は

$$\varepsilon^{d}_{Q_P} = 2\Delta\theta_P \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{3840\times10\times12} + \cdots\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840\times12\times14} + \cdots\right) c_n \right\} = 0$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840}\right)\left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{3840\times10\times12} + \cdots\right)}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840\times12\times14} + \cdots} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{12} + \frac{\Delta\theta^4}{240} - \frac{3\Delta\theta^6}{384\times16\times7} + \cdots}{\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840} - \frac{\Delta\theta^6}{3840\times12\times14} + \cdots}$$

$$\fallingdotseq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{53760} \quad \cdots\cdots (2.5.3\text{-}16)$$

上記の近似係数を改良した結果をまとめて表5.3-2に示す。

表2.5-2　姿勢更新における近似係数の改良

次数		改良2次	改良4次	改良6次
方向余弦マトリクス法（参考）	$s_n = \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$	1	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{6}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{6} + \frac{\Delta\theta^4}{120}$
	$c_n = \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}$	$\frac{1}{\mathbf{3}}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{\mathbf{30}}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{24} + \frac{\Delta\theta^4}{\mathbf{840}}$
四元数法	$s_n = \frac{1}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48}$	$\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} + \frac{\Delta\theta^4}{3840}$
	$c_n = \cos\frac{\Delta\theta}{2}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{\mathbf{12}}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{\mathbf{480}}$	$1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} - \frac{\Delta\theta^6}{\mathbf{54760}}$

2.5.4 姿勢誤差の評価

慣性航法で求めた姿勢には下記の誤差が含まれる。

☆ 観測値(角度増分)が持っている誤差

○ センサ誤差

○ 量子化誤差

☆ 更新計算における誤差

○ 打ち切り誤差

○ 切り捨て誤差

○ 丸め誤差

☆ 観測できないコーニングドリフトの補正残差

(1) センサ誤差

センサ誤差は7項に、慣性センサ・ユニット(IMU)の精度としてロケット毎に示す。

(2) 量子化誤差

ジャイロは角速度を積分し、それが一定の量に達したときに一つのパルスが生成され、そのパルスを積算することで角度積算値が得られる。量子化の過程で1パルスに満たない積分量は保持されるので、パルス出力値は下記の量子化誤差を持つ。

$$\varepsilon P = \pm\frac{P}{2} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}1)$$

ここで、P:パルスウェイト

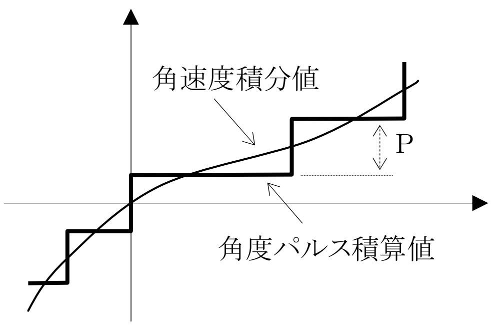


図2.5-1　量子化誤差

上記の量子化誤差を含んだパルス出力値は下記のように表される。

$$\theta_{Pi} = P_i + \varepsilon P_i \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}2)$$

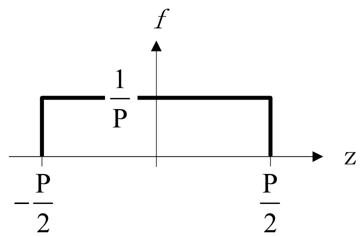
この量子化誤差は分布区間$\left[-\frac{P}{2},\frac{P}{2}\right]$で下図に示したような確率密度関数を持った一様分布と考えることができるので、下記の統計量で表される。

$E(\varepsilon P_i) = 0$　:量子化誤差の平均

$E(\varepsilon P_i \varepsilon P_j) = \delta_{ij}\sigma_i^2$　:量子化誤差の分散

ここで、E　:期待値オペレータ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{i=jのとき} \\ 0 & \text{i≠jのとき} \end{cases}$$



また、この量子化誤差の分散は、下記で表される。

$$\sigma^2 = E\left(\varepsilon P_i^2\right) = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \left\{z^2 f_{(z)}\right\} dz = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \left\{z^2 \frac{1}{P}\right\} dz = \left.\frac{z^3}{3P}\right|_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} = \frac{2}{3P}\left(\frac{P}{2}\right)^3 = \frac{P^2}{12} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}3)$$

角度積算値は、上記の誤差を持ったパルスを積算するから、下記のように表される。

$$\theta = \sum_{i=1}^{n}\left(P_i + \varepsilon P_i\right) \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}4)$$

$$\mu_\theta = E(\theta) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(P_i + \varepsilon P_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(P_i + \varepsilon P_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon P_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}5)$$

$$E(\theta - \mu_\theta)^2 = E\left(\theta^2 - 2\mu_\theta\theta + \mu_\theta{}^2\right) = E\left(\theta^2\right) - 2\mu_\theta E(\theta) + E\left(\mu_\theta{}^2\right) = E\left(\theta^2\right) - 2\mu_\theta{}^2 + \mu_\theta{}^2 = E\left(\theta^2\right) - \mu_\theta{}^2$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}(P_i + \varepsilon P_i)\right)^2 - \mu_\theta{}^2 = E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right)^2\right\} - \mu_\theta{}^2$$

$$= E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right)^2\right\} - \mu_\theta{}^2$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2 + 2E\left(\sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right)^2 - \mu_\theta{}^2$$

$$= E(\mu_\theta)^2 + 2\mu_\theta E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right)^2 - \mu_\theta{}^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon P_i\right)^2$$

$$= E\left(\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \varepsilon P_i \varepsilon P_j\right) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} E\left(\varepsilon P_i \varepsilon P_j\right) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \delta_{ij}\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = n\sigma^2 = n\frac{P^2}{12} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}6)$$

従って、累積量子化誤差の標準偏差は下記で表される。

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\sqrt{12}}\sqrt{n} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}7)$$

この角度積算は慣性センサ・ユニット(IMU)の中で行われるので、IMU誤差(ランダムウォーク)と等価となり、上式のデータ数nは角度パルスの累積数であるから、IMU出力データには下記の累積量子化誤差が含まれることとなる。

$$\Theta = \int_0^T |\omega| dt \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\sqrt{12}}\sqrt{n} = \frac{P}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{\Theta}{P}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\Theta P} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}9)$$

ここで、ω : 角速度

Θ : 累積角度

(3) 打ち切り誤差

姿勢更新における多項式の打ち切り誤差は、2.5.3項に示した改良が行われる。スケール誤差は(2.5.3-3)式及び(2.5.3-6)式のように正規化することで取り除くことができるが、スキュー誤差を取り除くための直交化は(2.5.3-4)式に示したように、3軸のうちの何れか1軸を基準として行うので、その基準とした軸がスキュー誤差を持っていると、ドリフト誤差と同じになってしまう。そこで方向余弦マトリクス法では、2.5.2(2)項のスキュー誤差(2.5.2-9)~(2.5.2-11)式と(3)項のドリフト誤差(2.5.2-14)~(2.5.2-16式)を合わせてドリフト誤差として評価する必要がある。

$$\varepsilon_{D_x}^d = -2\Delta\theta_y\Delta\theta_z\left(\varepsilon s_n - \varepsilon c_n\right) + \Delta\theta_x\left(\varepsilon s_n + \Delta\theta^2\varepsilon c_n\right)$$

$$= \varepsilon s_n\left(\Delta\theta_x - 2\Delta\theta_y\Delta\theta_z\right) + \varepsilon c_n\left(\Delta\theta^2\Delta\theta_x + 2\Delta\theta_y\Delta\theta_z\right) \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}10)$$

$$\varepsilon_{D_y}^d = \varepsilon s_n\left(\Delta\theta_y - 2\Delta\theta_z\Delta\theta_x\right) + \varepsilon c_n\left(\Delta\theta^2\Delta\theta_y + 2\Delta\theta_z\Delta\theta_x\right) \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}11)$$

$$\varepsilon_{D_z}^d = \varepsilon s_n\left(\Delta\theta_z - 2\Delta\theta_x\Delta\theta_y\right) + \varepsilon c_n\left(\Delta\theta^2\Delta\theta_z + 2\Delta\theta_x\Delta\theta_y\right) \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}12)$$

表2.5-3に打ち切り誤差を示す。

表2.5-3　姿勢更新における近似係数

計算法	種類	2次	4次	6次
方向余弦マトリクス法	スケール	$\frac{\Delta\theta^2}{8}\left(\Delta\theta_j^{\,2}+\Delta\theta_k^{\,2}\right)$	$-\frac{\Delta\theta^4}{144}\left(\Delta\theta_j^{\,2}+\Delta\theta_k^{\,2}\right)$	$\frac{\Delta\theta^6}{5760}\left(\Delta\theta_j^{\,2}+\Delta\theta_k^{\,2}\right)$
	スキュー	$-\frac{\Delta\theta^2}{4}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^4}{72}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^6}{2880}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$
	ドリフト	$\frac{\Delta\theta^2}{6}\Delta\theta_i$	$-\frac{\Delta\theta^4}{120}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{5040}\Delta\theta_i$
四元数法	スケール	$\frac{\Delta\theta^4}{64}$	$-\frac{\Delta\theta^6}{4608}$	$\frac{\Delta\theta^8}{737280}$
	スキュー	0	0	0
	ドリフト	$\frac{\Delta\theta^2}{24}\Delta\theta_i$	$-\frac{\Delta\theta^4}{1920}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{322560}\Delta\theta_i$

表2.5-4　姿勢更新における近似係数

計算法	種類		改良2次	改良4次	改良6次
方向余弦マトリクス法（参考）	スケール		$\frac{1}{6}\left(\Delta\theta_j^{\,2}+\Delta\theta_k^{\,2}\right)$	$-\frac{\Delta\theta^2}{120}\left(\Delta\theta_j^{\,2}+\Delta\theta_k^{\,2}\right)$	$\frac{\Delta\theta^4}{5040}\left(\Delta\theta_j^{\,2}+\Delta\theta_k^{\,2}\right)$
	スキュー		$-\frac{1}{3}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^2}{60}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^4}{2520}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$
	ドリフト	直交化無し	$-\frac{\Delta\theta^4}{45}\Delta\theta_i$	$-\frac{\Delta\theta^6}{840}\Delta\theta_i +$	$\frac{\Delta\theta^6}{45360}\Delta\theta_i$
		直交化有り(*)	$-\frac{\Delta\theta^4}{45}\Delta\theta_i-\frac{1}{3}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta^6}{840}\Delta\theta_i+\frac{\Delta\theta^2}{60}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta^6}{45360}\Delta\theta_i-\frac{\Delta\theta^4}{2520}\Delta\theta_j\Delta\theta_k$
四元数法	スケール		$-\frac{\Delta\theta^2}{12}$	$\frac{\Delta\theta^4}{960}$	$\frac{\Delta\theta^6}{161280}$
	スキュー		0	0	0
	ドリフト		$-\frac{\Delta\theta^4}{720}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^6}{53760}\Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta^8}{11612160}\Delta\theta_i$

（＊）スキュー誤差を除去するために直交化した場合。

上記の表に示したように、近似係数の改良を図ってドリフト誤差を小さくすると、スケール誤差とスキュー誤差が悪化することとなる。スケール誤差は正規化することで除去できるが、方向余弦マトリクス法におけるスキュー誤差は、直交化して除去しようとすると（2.5.4-10）～（2.5.4-12）式に示したようにドリフト誤差を増大させるので、スキュー誤差がない四元数にしかドリフト誤差の改善方法は適用できない。

（4）切り捨て誤差

計算機のビット長が有限であることから生ずる誤差で、演算中に最下位ビットの重みに満たない数値が切り捨てられると、それが累積して大きくなる。特に、積分や累積加算する式においては、理論値どおりの切り捨て誤差が累積してドリフトしてゆくのが観測される。

図2.5-2に示したように、長いビット長のデータの下位を切り捨てると、そのデータが正の場合でも負の場

合でも数直線上で値が小さくなるので、正の場合は切り捨てられてゼロに、負の場合は切り捨てられて－LSBになる。よって、積算データの最下位ビットの重み（LSB）の半分が、平均的に切り捨てられ、下記で表される。

$$\varepsilon_T = -\frac{LSB}{2} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}13)$$

従って、演算周期ΔT毎に時間Tの間、積算演算を繰り返すと、下記の累積切り捨て誤差が発生する。

$$\varepsilon_T = -\left(\frac{LSB}{2}\right)\frac{T}{\Delta T} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}14)$$

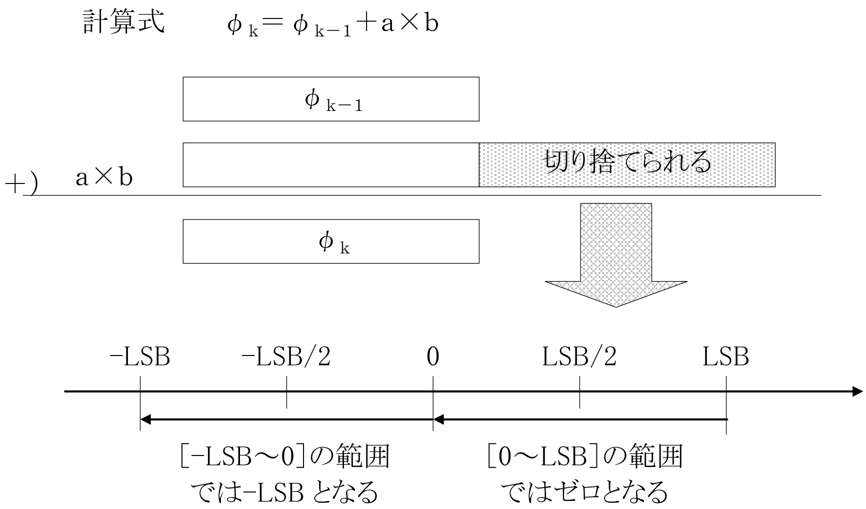


図2.5-2　切り捨て誤差

（5） 丸め誤差

上記（4）項の切り捨て誤差と同様に、計算機のビット長が有限であることから生ずる誤差であるが、演算中に最下位ビットの重みに満たない数値が四捨五入（丸め）される場合に発生する誤差で、下記のように表される。

$$\varepsilon_R = \pm\frac{LSB}{2} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}15)$$

この誤差は平均値ゼロで分布区間$\left[-\frac{LSB}{2}, \frac{LSB}{2}\right]$の範囲で一様分布する考えられるので、量子化誤差と同様に、その分散は下記で表される。

$$\sigma_R^{\ 2} = \frac{LSB^2}{12} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}16)$$

従って、演算周期ΔT毎に時間Tの間、丸め誤差を持ったデータを積算すると、下記の累積丸め誤差が発生する。

$$\sigma_R = \frac{LSB}{\sqrt{12}}\sqrt{n} = \frac{LSB}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{T}{\Delta T}} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}17)$$

（6） コーニングドリフト補正残差

コーニング補正（座標回転の補正）は5.4項に述べた方法で行い、ジャイロで計測できない（2.4-1）式の第2項以降のノンコミュタティビティ・レートのうち、無視された第3項が補正残差となる。

姿勢更新は、回転角ベクトル（2.4-1）式を微小時間Δt間で積分して得た角度増分を用いて行うので、そ

の微小時間Δt間の角度増分は微小と見なせて$\Delta\theta_{(t)} \ll 1$であるから、第3項の係数は5.4項にも示したように$\frac{1}{\Delta\theta_{(t)}{}^2}\left(1-\frac{\Delta\theta_{(t)}\sin\Delta\theta_{(t)}}{2\left(1-\cos\Delta\theta_{(t)}\right)}\right) \fallingdotseq \frac{1}{12}$となり、コーニングドリフト補正残差は下記で表される。

$$\varepsilon\boldsymbol{\theta}_{c(T)} = \int_{T-\Delta t}^{T}\left[\frac{1}{\Delta\theta_{(t)}{}^2}\left(1-\frac{\Delta\theta_{(t)}\sin\Delta\theta_{(t)}}{2\left(1-\cos\Delta\theta_{(t)}\right)}\right)\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right)\right\}\right]dt$$

$$= \frac{1}{12}\int_{T-\Delta t}^{T}\left\{\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right)\right\}dt = \frac{1}{12}\int_{T-\Delta t}^{T}\left\{\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right\}dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5.4\text{-}18)$$

よって、(2.4-6)式と同様に、上式の$\Delta\boldsymbol{\theta}_{(t)}$をジャイロ出力信号$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(t)} = \int\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt$を用いて近似し、シンプソンの積分公式を用いて積分すれば

$$\varepsilon\boldsymbol{\theta}_{c(T)} = \frac{1}{12}\int_{T-\Delta t}^{T}\left\{\left[\left(\int_{T-\Delta t}^{t}\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}d\tau\right)\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{\Delta t}{6}\left[\left\{\left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}d\tau\right)\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T-\Delta t)}\right\}+4\left\{\left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}d\tau\right)\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}+\left\{\left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}d\tau\right)\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right]$$

$$= \frac{\Delta t}{72}\left[4\left\{\left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T-\frac{1}{2}\Delta t}\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}d\tau\right)\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}+\left\{\left[\left(\int_{T-\Delta t}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}d\tau\right)\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right]$$

$$= \frac{\Delta t}{72}\left[4\left\{\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T-\frac{1}{2}\Delta t)}\right\}+\left\{\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\right]^2\cdot\boldsymbol{\omega}_{B(T)}\right\}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5.4\text{-}19)$$

従って、上式に(2.4-9)式、(2.4-12)式及び(2.4-13)式を代入して、コーニングドリフト補正残差は下記のように表される。

$$\varepsilon\boldsymbol{\theta}_{c(T)} = \frac{\Delta t}{72}\left[4\left\{\left[\left(\frac{1}{8}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{3}{8}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right)\times\right]^2\cdot\left(\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right)\right\}+\left\{\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\right]^2\cdot\left(-\frac{1}{2\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}+\frac{3}{2\Delta t}\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{\Delta t}{72}\left\{\frac{1}{2\Delta t}\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\times\right]^2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}-\frac{1}{2\Delta t}\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\right]^2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\right\}$$

$$= \frac{1}{144}\left\{\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\times\right]^2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}-\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\right]^2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5.4\text{-}20)$$

ここでコーニング運動を(2.2.4-4)式のように下記で表して積分すると

$$\boldsymbol{\omega}_{B(t)} = \Omega\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ \sin\theta\cos\Omega t\\ -\sin\theta\sin\Omega t\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5.4\text{-}21)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)} = \int_{T-\Delta t}^{T}\begin{pmatrix}\Omega\left(1-\cos\theta\right)\\ \Omega\sin\theta\cos\Omega t\\ -\Omega\sin\theta\sin\Omega t\end{pmatrix}dt = \left.\begin{pmatrix}\Omega\left(1-\cos\theta\right)t\\ \sin\theta\sin\Omega t\\ \sin\theta\cos\Omega t\end{pmatrix}\right|_{T-\Delta t}^{T} = \begin{pmatrix}\Omega\left(1-\cos\theta\right)\Delta t\\ \sin\theta\left\{\sin\Omega(T)-\sin\Omega(T-\Delta t)\right\}\\ \sin\theta\left\{\cos\Omega(T)-\cos\Omega(T-\Delta t)\right\}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\Omega\left(1-\cos\theta\right)\Delta t\\ \sin\theta\left\{\sin\Omega T-\sin\Omega T\cos\Omega\Delta t+\cos\Omega T\sin\Omega\Delta t\right\}\\ \sin\theta\left\{\cos\Omega T-\cos\Omega T\cos\Omega\Delta t-\sin\Omega T\sin\Omega\Delta t\right\}\end{pmatrix}$$

ここで$\theta \ll 1$及び$\Omega\Delta t \ll 1$とすれば

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\theta^2}{2}\Omega\Delta t\\ \theta\left\{\sin\Omega T-\left(1-\dfrac{\Omega^2\Delta t^2}{2}\right)\sin\Omega T+\Omega\Delta t\cos\Omega T\right\}\\ \theta\left\{\cos\Omega T-\left(1-\dfrac{\Omega^2\Delta t^2}{2}\right)\cos\Omega T-\Omega\Delta t\sin\Omega T\right\}\end{pmatrix}=\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\Delta t\sin\Omega T+2\cos\Omega T\\ \Omega\Delta t\cos\Omega T-2\sin\Omega T\end{pmatrix}\quad\cdot\cdot(2.5.4\text{-}22)$$

同様に

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}=\int_{T-2\Delta t}^{T-\Delta t}\begin{pmatrix}\Omega(1-\cos\theta)\\ \Omega\sin\theta\cos\Omega t\\ -\Omega\sin\theta\sin\Omega t\end{pmatrix}dt=\left.\begin{pmatrix}\Omega(1-\cos\theta)t\\ \sin\theta\sin\Omega t\\ \sin\theta\cos\Omega t\end{pmatrix}\right|_{T-2\Delta t}^{T-\Delta t}=\begin{pmatrix}\Omega(1-\cos\theta)\Delta t\\ \sin\theta\{\sin\Omega(T-\Delta t)-\sin\Omega(T-2\Delta t)\}\\ \sin\theta\{\cos\Omega(T-\Delta t)-\cos\Omega(T-2\Delta t)\}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\Omega(1-\cos\theta)\Delta t\\ \sin\theta\{\sin\Omega T\cos\Omega\Delta t-\cos\Omega T\sin\Omega\Delta t-\sin\Omega T\cos 2\Omega\Delta t+\cos\Omega T\sin 2\Omega\Delta t\}\\ \sin\theta\{\cos\Omega T\cos\Omega\Delta t+\sin\Omega T\sin\Omega\Delta t-\cos\Omega T\cos 2\Omega\Delta t-\sin\Omega T\sin 2\Omega\Delta t\}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\theta^2}{2}\Omega\Delta t\\ \theta\left\{\left(1-\dfrac{\Omega^2\Delta t^2}{2}\right)\sin\Omega T-\Omega\Delta t\cos\Omega T-\left(1-2\Omega^2\Delta t^2\right)\sin\Omega T+2\Omega\Delta t\cos\Omega T\right\}\\ \theta\left\{\left(1-\dfrac{\Omega^2\Delta t^2}{2}\right)\cos\Omega T+\Omega\Delta t\sin\Omega T-\left(1-2\Omega^2\Delta t^2\right)\cos\Omega T-2\Omega\Delta t\sin\Omega T\right\}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\theta^2}{2}\Omega\Delta t\\ \theta\left\{\dfrac{3}{2}\Omega^2\Delta t^2\sin\Omega T+\Omega\Delta t\cos\Omega T\right\}\\ \theta\left\{\dfrac{3}{2}\Omega^2\Delta t^2\cos\Omega T-\Omega\Delta t\sin\Omega T\right\}\end{pmatrix}=\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\begin{pmatrix}\theta\\ \{3\Omega\Delta t\sin\Omega T+2\cos\Omega T\}\\ \{3\Omega\Delta t\cos\Omega T-2\sin\Omega T\}\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdot(2.5.4\text{-}23)$$

ここで(2.5.4-22)式及び(2.5.4-23)式を下記のように略記して

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}=\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\Delta t\sin\Omega T+2\cos\Omega T\\ \Omega\Delta t\cos\Omega T-2\sin\Omega T\end{pmatrix}\equiv\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}=\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\begin{pmatrix}\theta\\ 3\Omega\Delta t\sin\Omega T+2\cos\Omega T\\ 3\Omega\Delta t\cos\Omega T-2\sin\Omega T\end{pmatrix}=\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\left\{\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\Delta t\sin\Omega T+2\cos\Omega T\\ \Omega\Delta t\cos\Omega T-2\sin\Omega T\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\Omega\Delta t\sin\Omega T\\ 2\Omega\Delta t\cos\Omega T\end{pmatrix}\right\}\equiv\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\begin{pmatrix}x\\ y+b\\ z+c\end{pmatrix}$$

(2.5.4-20)式のシンメトリックマトリクスは上式より

$$\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T)}\times\right]^2=\left(\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\right)^2\begin{pmatrix}-y^2-z^2 & xy & xz\\ xy & -x^2-z^2 & yz\\ xz & yz & -x^2-y^2\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot(2.5.4\text{-}24)$$

$$\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_{B(T-\Delta t)}\times\right]^2=\left(\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\right)^2\begin{pmatrix}-(y+b)^2-(z+c)^2 & x(y+b) & x(z+c)\\ x(y+b) & -x^2-(z+c)^2 & (y+b)(z+c)\\ x(z+c) & (y+b)(z+c) & -x^2-(y+b)^2\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdot\cdot(2.5.4\text{-}25)$$

よって、コーニングドリフト補正残差は下記で表される。

$$\varepsilon\boldsymbol{\theta}_{c(T)} = \frac{1}{144}\left(\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\right)^3 \left\{ \begin{pmatrix} -(y+b)^2-(z+c)^2 & x(y+b) & x(z+c) \\ x(y+b) & -x^2-(z+c)^2 & (y+b)(z+c) \\ x(z+c) & (y+b)(z+c) & -x^2-(y+b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{144}\left(\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} -x(2yb+b^2+2zc+c^2) \\ 2x^2b+2z^2b-yc^2-2yzc+zbc \\ 2x^2c+2y^2c-zb^2-2yzb+ybc \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{144}\left(\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} -8\theta(\Omega\Delta t)^2 \\ 4\theta^2(\Omega\Delta t)\sin\Omega T-16(\Omega\Delta t)^2s^2c+16(\Omega\Delta t)s^3-16(\Omega\Delta t)^2c^3+16(\Omega\Delta t)sc^2 \\ 4\theta^2(\Omega\Delta t)\cos\Omega T+16(\Omega\Delta t)^2sc^2+16(\Omega\Delta t)c^3+16(\Omega\Delta t)^2s^3+16(\Omega\Delta t)s^2c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{144}\left(\frac{\theta\Omega\Delta t}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} -8\theta(\Omega\Delta t)^2 \\ 4\theta^2(\Omega\Delta t)\sin\Omega T-16(\Omega\Delta t)^2\cos\Omega T+16(\Omega\Delta t)\sin\Omega T \\ 4\theta^2(\Omega\Delta t)\cos\Omega T+16(\Omega\Delta t)^2\sin\Omega T+16(\Omega\Delta t)\cos\Omega T \end{pmatrix}$$

高次項を省略して

$$\varepsilon\boldsymbol{\theta}_{c(T)} = \frac{\theta^3(\Omega\Delta t)^4}{144}\begin{pmatrix} -\theta(\Omega\Delta t) \\ 2\sin\Omega T \\ 2\cos\Omega T \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2.5.4\text{-}26)$$

ここで、θ :コーニング半頂角

Ω :コーニングレート

Δt :データサンプリング時間間隔

3　位置及び速度の計算方法

3.1　位置及び速度

ロケットに作用する加速度は下記で表される。

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_F + \mathbf{g} \quad \cdots\cdots (3.1\text{-}1)$$

ここで、 $\mathbf{a}_F$:推力と空気力による加速度ベクトル

$\mathbf{g}$:重力加速度ベクトル

ロケットの航法においては、加速度計で $\mathbf{a}_F$ を検出し、加速度計で検出できない $\mathbf{g}$ を位置ベクトルから計算し、それらを積分した速度及び、さらに速度を積分した位置を下記のように求める。

$$\mathbf{v}_{(T)} = \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \int_{T-\Delta T}^{T} \mathbf{a}_F dt + \int_{T-\Delta T}^{T} \mathbf{g} dt \quad \cdots\cdots (3.1\text{-}2)$$

$$\mathbf{r}_{(T)} = \mathbf{r}_{(T-\Delta T)} + \int_{T-\Delta T}^{T} \mathbf{v}_{(t)} dt \quad \cdots\cdots (3.1\text{-}3)$$

ここで、 $\mathbf{v}$:慣性速度ベクトル

$\mathbf{r}$:地心半径ベクトル

T :現在時刻

ΔT :位置・速度更新時間間隔(ロケットの場合、0.5秒～2秒程度)

上式の積分は、実際には離散化されたデータ(速度増分)を積算する形式で行うので、下記のように台形積分(改良オイラー法)によるイタレーション形式で表される。

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T),0})} = \mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T-\Delta T)})} \\
&\Delta\mathbf{v}_{(T),i} = \Delta\mathbf{v}_{F(T)} + \frac{\Delta T}{2}\left\{\mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T-\Delta T)})} + \mathbf{g}_{(\mathbf{r}_{(T),i-1})}\right\} \\
&\mathbf{r}_{(T),i} = \mathbf{r}_{(T-\Delta T)} + \left\{\mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}_{(T),i}\right\}\Delta t \\
&\mathbf{v}_{(T)} = \mathbf{v}_{(T-\Delta T)} + \Delta\mathbf{v}_{(T),i}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.1\text{-}4)$$

ここで、繰り返し回数は、i＝1～2で十分

$\Delta\mathbf{v}_{F(T)} = \int_{T-\Delta T}^{T} \mathbf{a}_F dt$:推力と空気力による速度増分ベクトル(6.2項)

上式で速度は繰り返しループに入れる必要はないが、簡略化するため上式のように表現した。また、重力加速度は J_2 項まで考慮して下記のとおり求められる。

$$\mathbf{g}_{(\mathbf{r})} = -\frac{\mu}{r^2}\begin{pmatrix}
\frac{x}{r}\left\{1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left(5\sin^2\varphi_r - 1\right)\right\} \\
\frac{y}{r}\left\{1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left(5\sin^2\varphi_r - 1\right)\right\} \\
\frac{z}{r}\left\{1 - \frac{3}{2} j_2 \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left(5\sin^2\varphi_r - 3\right)\right\}
\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (3.1\text{-}5)$$

ここで、$\mu = 3.986009 \times 10^{14}\ \ m^3/s^2$:地球重力定数

$j_2 = 1.082628 \times 10^{-3}$:地球重力ポテンシャル調和係数

$a_e = 6378.142\ \ km$:地球赤道半径

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=\begin{pmatrix}\frac{x}{r}\\ \frac{y}{r}\\ \frac{z}{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi_r\cos\lambda_r\\ \cos\varphi_r\sin\lambda_r\\ \sin\varphi_r\end{pmatrix}$$

φ_r ：地心緯度

λ_r ：経度

3.2 推力と空気力による速度増分ベクトル

ストラップダウン型の慣性センサ・ユニット(IMU)においては、加速度計は入力軸が機体の回転と共に方向を変えるので、それが検出した加速度を積分した値は座標基準が定かでない。このため、この積分値を微分して機体座標系から見た加速度に戻して回転の補正をしながら積分するか、慣性座標系に変換して積分するかして、定まった座標系での速度を求める必要がある。通常は、計算所要時間の観点から、計算量が少なくて済む機体座標系で求める方式を採る。実際には離散化されたデータの処理なので微少時間での速度増分が得られたら、それに回転の補正を施して積算する方式で、以下のように求める。

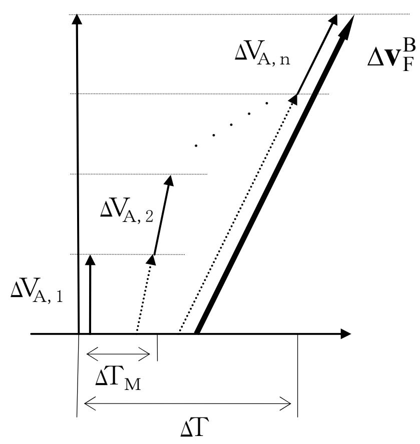


図3.2-1 回転座標系での速度増分の積算

まず、推力と空気力による加速度は、それを積分した速度が機体座標系で得られているものとすると、その速度を微分して下記のように表すことができる。

$$\mathbf{v}_{F(t)}=\int_0^t\mathbf{a}_{F(t)}dt=\int_0^t\left(\mathbf{D}^I_{B(\tau)}\cdot\mathbf{a}^B_{F(\tau)}\right)d\tau=\mathbf{D}^I_{B(t)}\cdot\mathbf{v}^B_{F(t)}\quad\cdots\cdots(3.2\text{-}1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}=\dot{\mathbf{D}}^I_{B(t)}\cdot\mathbf{v}^B_{F(t)}+\mathbf{D}^I_{B(t)}\cdot\dot{\mathbf{v}}^B_{F(t)}=\mathbf{D}^I_{B(t)}\cdot\left[\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\times\right]\cdot\mathbf{v}^B_{F(t)}+\mathbf{D}^I_{B(t)}\cdot\dot{\mathbf{v}}^B_{F(t)}$$
$$=\mathbf{D}^I_{B(t)}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\times\mathbf{v}^B_{F(t)}+\dot{\mathbf{v}}^B_{F(t)}\right)\quad\cdots\cdots(3.2\text{-}2)$$

ここで、 $\mathbf{v}_F$ ：慣性座標系から見た推力と空気力による速度ベクトル

$\dot{\mathbf{v}}_F$ ：慣性座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトル

$\mathbf{D}^I_B$ ：慣性座標系から見た機体座標系の方向余弦マトリクス

$\boldsymbol{\omega}_B$ ：機体座標系の回転角速度ベクトル

$\mathbf{v}^B_F$ ：機体座標系から見た推力と空気力による速度ベクトル

$\mathbf{a}^B_F$ ：機体座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトル

従って、(3.2-2)式から機体座標系での速度の微係数は下記のように表され、これを積分して速度を求める式が得られる。

$$\dot{\mathbf{v}}^B_{F(t)}=\left(\mathbf{D}^I_{B(t)}\right)^T\cdot\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}-\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\times\mathbf{v}^B_{F(t)}=\mathbf{a}^B_{F(t)}-\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\times\mathbf{v}^B_{F(t)}\quad\cdots\cdots(3.2\text{-}3)$$

$$\mathbf{v}^B_{F(t)}=\int_0^t\mathbf{a}^B_{F(\tau)}d\tau-\int_0^t\boldsymbol{\omega}_{B(\tau)}\times\mathbf{v}^B_{F(\tau)}d\tau\quad\cdots\cdots(3.2\text{-}4)$$

上式の右辺第1項はIMUから得られる速度で、機体と共に回転して時々刻々変わる入力軸方向の加速度を積分したデータであり、第2項は回転補正項(コリオリの力)である。

ところで推力と空気力による速度ベクトルは、(3.1-4)式に示したように、慣性座標系から見た単位時間あ

たりの速度増分として用いるので、上記(3.2-4)式の機体座標系から見た推力と空気力による加速度ベクトルの積分は、(3.1-4)式における単位時間ΔTでの速度増分として求め、それを慣性座標系に座標変換して(3.1-4)式に繋ぐことになる。

$$\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T)} = \int_{T-\Delta T}^{T}\mathbf{a}^{B}_{F(t)}dt - \int_{T-\Delta T}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}\times\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(t)}dt \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}5)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{F(T)} = \mathbf{D}^{I}_{B(T)}\cdot\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T)} \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}6)$$

次に(3.2-5)式の速度増分を求める。まず、IMUからは下記の出力が得られる。

$$\mathbf{v}_{A(T)} = \int_{t_0}^{T}\mathbf{a}^{B}_{F(t)}dt \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}7)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{G(T)} = \int_{t_0}^{T}\boldsymbol{\omega}_{B(t)}dt \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}8)$$

ここで、t_0:任意の時刻(不定)

このIMU出力をΔT_M時間間隔でサンプリングし、その差分を取って

$$\Delta\mathbf{v}_{A(T)} = \mathbf{v}_{A(T)} - \mathbf{v}_{A(T-\Delta T_M)} \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}9)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)} = \boldsymbol{\theta}_{G(T)} - \boldsymbol{\theta}_{G(T-\Delta T_M)} \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}10)$$

ここで、$\Delta T_M = \dfrac{\Delta T}{m}$:速度増分積算時間間隔(通常、姿勢更新周期(IMUデータサンプリング周期)と

同じで、ロケットの場合、30Hzから50Hz程度)

上記の差分を用いて、t=T-ΔT_M ～ Tの期間における速度増分及び角速度は下記のように近似的に表される。

$$\mathbf{v}^{B}_{F(t)} = \mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \frac{\Delta\mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M}(t - T + \Delta T_M) \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B(t)} = \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M} \quad (\text{一定}) \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}12)$$

従って、(3.2-5)式に(3.2-11)式及び(3.2-12)式を代入してΔT_M間だけ積分すると

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T)} &= \Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \Delta\mathbf{v}_{A(T)} - \int_{T-\Delta T_M}^{T}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M}\times\left\{\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \frac{\Delta\mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M}\left(t - T + \Delta T_M\right)\right\}dt \\
&= \Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \Delta\mathbf{v}_{A(T)} - \left[\left\{\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M}\times\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)}\right\}t - \left\{\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M}\times\frac{\Delta\mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M}\right\}\left\{\frac{t^2}{2} - \left(T - \Delta T_M\right)t\right\}\right]_{T-\Delta T_M}^{T} \\
&= \Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \Delta\mathbf{v}_{A(T)} - \left\{\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M}\times\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)}\right\}\Delta T_M - \left\{\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}}{\Delta T_M}\times\frac{\Delta\mathbf{v}_{A(T)}}{\Delta T_M}\right\}\frac{\Delta T_M{}^2}{2} \\
&= \Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \Delta\mathbf{v}_{A(T)} - \Delta\boldsymbol{\theta}_{G(T)}\times\left\{\Delta\mathbf{v}^{B}_{F(T-\Delta T_M)} + \frac{\Delta\mathbf{v}_{A(T)}}{2}\right\} \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}13)
\end{aligned}$$

よって、ΔT間の速度増分(3.2-5)式は、下記の漸化式で表される。

$$\Delta\mathbf{v}^{B}_{F,0} = 0$$

$$\Delta\mathbf{v}^{B}_{F,k} = \Delta\mathbf{v}^{B}_{F,k-1} + \Delta\mathbf{v}_{A,k} - \Delta\boldsymbol{\theta}_{G,k}\times\left\{\Delta\mathbf{v}^{B}_{F,k-1} + \frac{\Delta\mathbf{v}_{A,k}}{2}\right\} \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}14)$$

ここで、k=1～m

$\Delta\mathbf{v}_{A,k} \equiv \Delta\mathbf{v}_{A(T-\Delta T+k\Delta T_M)}$ であり、$\Delta\mathbf{v}_{A,m} \equiv \Delta\mathbf{v}_{A(T)}$ である。下添字のkは以下同様。

上記のk=m時点の速度増分を下記のように慣性系に座標変換して(3.1-4)式にインプットする。

$$\Delta\mathbf{v}_{F(T)} = \mathbf{D}^{I}_{B(T)}\cdot\Delta\mathbf{v}^{B}_{F,m} \quad \cdots\cdots (3.2\text{-}15)$$

3.3　座標回転の補正(スカーリング補正)

IMUの内部でドリフト補償等のデータ処理を行うため、上記3.2項のΔT_Mより短い時間間隔で加速度計からのパルス出力を積算することがあり、この場合にも座標系の回転補正を行う必要がある。上記3.2項の回転補正の方法は(3.2-3)式に示したように、常に現在時刻の機体座標系から見た速度積算値を表すようにしているが、ここでは積算開始時点の機体座標系から見た速度積算となるように、この積算開始時点の機体座標系を慣性系と見なして積算する方法を示す。この補正は微少時間での角度増分を用いた座標変換であるが、方向余弦マトリクスや四元数等を用いた座標変換とは区別してスカーリング補正と呼ばれている。

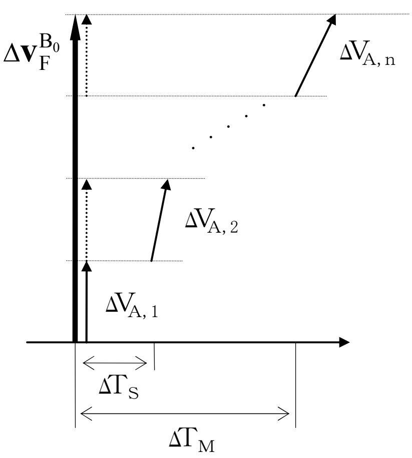


図3.3-1　座標回転の補正(スカーリング補正)

まず、(3.2-2)式及び(3.2-3)式より、基準時刻T_0における機体座標系B_0での速度の微係数は下記のように表される。

$$\dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^{B_0} = \mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{B(t)} \times \mathbf{v}_{F(t)}^{B} + \dot{\mathbf{v}}_{F(t)}^{B} \right) = \mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} \cdot \mathbf{a}_{F(t)}^{B} \quad \cdots\cdots (3.3\text{-}1)$$

上式の方向余弦マトリクス及び加速度は、微小時間の間では下記のように近似して表すことができる。

$$\mathbf{D}_{B(t)}^{B_0} = \mathbf{1} + \left[\int_{T_0}^{t} \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau \times \right] \quad \cdots\cdots (3.3\text{-}2)$$

これを(3.3-1)式に代入して積分すれば、下記のように速度を求める式が得られる。

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_{F(t)}^{B_0} &= \Delta \mathbf{v}_{F(t-\Delta T_S)}^{B_0} + \left(\mathbf{1} + \left[\int_{T_0}^{t} \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau \times \right] \right) \cdot \int_{t-\Delta T_S}^{t} \mathbf{a}_{F(\tau)}^{B} d\tau \\ &= \Delta \mathbf{v}_{F(t-\Delta T_S)}^{B_0} + \Delta \mathbf{v}_{A(t)} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{G(t)} \times \Delta \mathbf{v}_{A(t)} \quad \cdots\cdots (3.3\text{-}3)\end{aligned}$$

ここで、$\Delta \mathbf{v}_{A(t)} = \int_{t-\Delta T_S}^{t} \mathbf{a}_{F(\tau)}^{B} d\tau = \mathbf{v}_{A(t)} - \mathbf{v}_{A(t-\Delta T_S)}$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{G(t)} = \int_{T_0}^{t} \boldsymbol{\omega}_{B(\tau)} d\tau = \boldsymbol{\theta}_{G(t)} - \boldsymbol{\theta}_{G(T_0)} = \sum_{i=1}^{j} \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,i}$$

$t = T_0 + j\Delta T_S$

ΔT_S　:IMU内での加速度データサンプリング周期

従って、上式の$\Delta T_M = n\Delta T_S$間のスカーリング補正を含む速度増分は、下記で表される。

$$\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^{B_0} = \sum_{j=1}^{n} \Delta \mathbf{v}_{A,j} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \Delta \boldsymbol{\theta}_{G,i} \right) \times \Delta \mathbf{v}_{A,j} \quad \cdots\cdots (3.3\text{-}4)$$

上式で求めた$\Delta \mathbf{v}_{F(T)}^{B_0}$が(3.2-9)式の$\Delta \mathbf{v}_{A(T)}$に対応する速度増分で、実際にはIMU内部でこれを積算して(3.2-9)式の$\mathbf{v}_{A(T)}$として出力される。