振動の運動方程式

目　　次

1 水平単振動

バネの一端を固定し、他端におもりを付けた水平振動系の運動方程式は次のように表される。

$m\ddot{x} = -kx$ ：水平単振動の運動方程式 ········ (1-1)

x ：自然長（振動中心）からの変位（バネの伸縮長） [m]

m ：おもりの質量 [kg]

k ：バネ定数 [N/m]

これを変形して、

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ：単振動の微分方程式 ········ (1-2)

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ：固有角振動数 [rad/s] ········ (1-3)

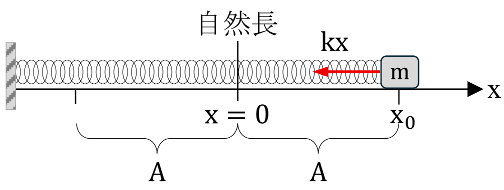


図1-1 水平単振動

単振動の微分方程式を補足1に示したように解いて、

$x = A\cos(\omega t + \beta)$ ：変位 [m] ········ (1-4)

$A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$ ：振幅 [m] ········ (1-5)

$\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{-\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ ：初期位相 [rad] ········ (1-6)

x_0 ：自然長からの初期位置 [m]

$\dot{x}_0$ ：初期速度 [m/s]

2 鉛直単振動

水平単振動の系を鉛直方向に配置すると、おもりの重力が作用して次のような運動方程式となる。

$m\ddot{y} = -ky + mg = -k\left(y - \frac{mg}{k}\right)$ ：垂直単振動の運動方程式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(2-1)

y ：自然長からの変位（バネの伸縮長）（鉛直下向きを正） [m]

m ：おもりの質量 [kg]

k ：バネ定数 [N/m]

$g = 9.80665$ [m/s2] ：重力加速度

ここでおもりを手で押さえて静かに下げると、弾性力と重力がつり合う下記の位置までバネが伸びておもりは静止する。

$d = \frac{mg}{k}$ ：弾性力と重力がつり合う位置までのバネの伸び [m]・・・・・・・・・・(2-2)

運動方程式のカッコ内を下記のように置いて、

$x = y - \frac{mg}{k}$ ：振動中心からの変位（鉛直下向きを正）・・・・・・・・・・・・・・・・・(2-3)

x を微分して、

$\ddot{x} = \ddot{y}$

これらを上の運動方程式に代入して、

$m\ddot{x} = -kx$ ：単振動の運動方程式

このように、鉛直単振動も水平単振動と同じ式で表すことができる。従って、この運動は下記のように表される。

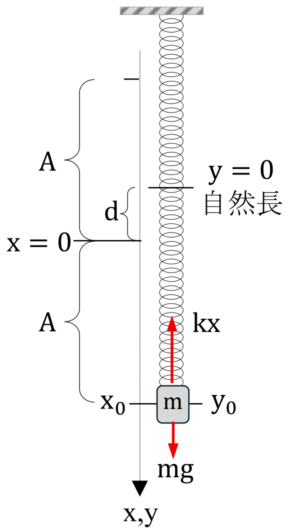


図2-1　鉛直単振動

$x = A\cos(\omega t + \beta)$ ：変位 [m]

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ：固有角振動数 [rad/s]

$A = \sqrt{x_0{}^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$ ：振幅 m]

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{-\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ ：初期位相 [rad]

ここで、バネを正の位置y_0まで引き延ばしておもりを放すと、$y = d$ $(x = 0)$の位置を中心として単振動を開始する。

y_0 ：自然長からの初期位置 [m]

$x_0 = y_0 - d$ ：振動中心からの初期位置 [m]

$x = A\cos(\omega t + \beta)$ ：振動中心からの変位 [m]・・(2-4)

$y = A\cos(\omega t + \beta) + d$ ：自然長からの変位 [m]・・(2-5)

重力のような一定の力が加わった場合には式(2-5)のように振動中心がシフトする。単振動以外の振動も同様となるので、他の振動で重力が加わるケースの説明は省略する。

3 摩擦力が作用する単振動

動摩擦力が作用する振動では、おもりが負方向に動いているときは動摩擦力が正方向に作用し、折返しておもりが正方向に向きを変えると動摩擦力は負方向に作用する。

おもりが負方向に動いて動摩擦力が正方向に作用するときの運動方程式は、次のように表される。

$m\ddot{y} = -ky + \mu' mg = -k\left\{y - \mu'\frac{mg}{k}\right\}$:動摩擦力が作用する振動の運動方程式………………(3-1)

y :自然長からの変位(バネの伸縮長) [m]

m :おもりの質量 [kg]

k :バネ定数 [N/m]

μ' :動摩擦係数 [ND]

運動方程式のカッコ内を下記のように置いて、

$x = y - \mu'\frac{mg}{k}$ ………………………………………………………………………(3-2)

$m\ddot{y} = -kx$

式(3-2)の x を微分して、

$\ddot{x} = \ddot{y}$

これを上の運動方程式に代入して、

$m\ddot{x} = -kx$:単振動の運動方程式

また、おもりが正方向に動いて動摩擦力が負方向に作用するときは、次のように表される。

$m\ddot{y} = -ky - \mu' mg = -k\left\{y + \mu'\frac{mg}{k}\right\}$ ……………………………………………………(3-3)

$x = y + \mu'\frac{mg}{k}$

$m\ddot{x} = -kx$:単振動の運動方程式

このように、単振動の運動方程式は動摩擦力が作用する向きの正負に関わらず同じになる。

おもりの運動の向きは速度で分かるから、動摩擦力の向きを考慮した運動方程式は次のように表現できる。

$m\ddot{y} = -ky - \mathrm{sign}(\dot{y})\mu' mg = -k\left\{y + \mathrm{sign}(\dot{y})\mu'\frac{mg}{k}\right\}$:摩擦力が作用する単振動の運動方程式…(3-4)

ここで、$\mathrm{sign}(\dot{y})$:速度の符号

上記の単振動の運動方程式を下記で置き換えて、

$x = y + \mathrm{sign}(\dot{y})\mu'\frac{mg}{k}$:振動中心からの変位………………………………………………(3-5)

$m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$:単振動の微分方程式

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:固有角振動数 $\left[\frac{rad}{s}\right]$ ……………………………………………………………(3-6)

単振動の微分方程式を補足1に示したように解いて、

$x = A\cos(\omega t + \beta)$:変位 [m]…………………………………………………………(3-7)

A :振幅 [m]

β :初期位相 [rad]

式(3-5)から自然長からの変位は次のように表される。

$$y = x - \mathrm{sign}(\dot{y})\mu'\frac{mg}{k} = A\cos(\omega t + \beta) - \mathrm{sign}(\dot{y})\mu'\frac{mg}{k}$$

$$= A\cos(\omega t + \beta) - \mathrm{sign}(\dot{y})d$$ ：自然長からの変位の一般解・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3-8)

次に未定定数を決定して特殊解を求めるため、y を微分して、

$\dot{y} = -A\omega\sin(\omega t + \beta)$ ：速度

変位yと速度$\dot{y}$に$t = 0$の初期値を代入して、

$y_0 = A\cos\beta - \mathrm{sign}(\dot{y})d$ ：初期変位

$\dot{y}_0 = -A\omega\sin\beta$ ：初期速度

上式より、

$$\cos\beta = \frac{y_0 + \mathrm{sign}(\dot{y})d}{A}$$

$$\sin\beta = -\frac{\dot{y}_0}{A\omega}$$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ より、

$$\left(-\frac{\dot{y}_0}{A\omega}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + \mathrm{sign}(\dot{y})d}{A}\right)^2 = 1$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2 + \{y_0 + \mathrm{sign}(\dot{y})d\}^2}$$ ：振幅

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\dot{y}_0}{\omega\{y_0 + \mathrm{sign}(\dot{y})d\}}\right)$$ ：初期位相・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3-9)

実際には最初の単振動以外は初速ゼロの単振動が繰り返されるから、最初の単振動も初速ゼロとして扱う。

$A = |y_0 + \mathrm{sign}(\dot{y})d|$ ：振幅・・・(3-10)

図3-1(a)に示したように、バネを引き延ばした正の位置(y_0)でおもりを放すと、速度が負なので動摩擦力が正方向に作用する状態で単振動を開始する。振動中心は正側にシフトしている。

$y = A_0\cos\omega t - \mathrm{sign}(\dot{y})d$ ：変位

$A_0 = y_0 - d$ ：振幅

$\beta_0 = 0$ ：初期位相

初期位置から半周期 $\omega t + \beta = 180°$ 振れた点の位置は次のようになる。

$y_1 = -A_0 + d = -(y_0 - 2d)$

この点で振動は一瞬停止して折返し、新しい初期位置(y_1)と初期速度($\dot{y}_1 = 0$)で振幅と初期位相が変化した単振動を開始することになる。

図3-1(b)に示したように、折返して速度が正に変わると動摩擦力が負となり、振動中心が負方向に移動して2回目の半周期の単振動が開始される。

$y = A_1\cos\omega t - \mathrm{sign}(\dot{y})d$ ：変位

$\dot{y} = -A_1\omega\sin\omega t$ ：速度

$A_1 = |y_1 + \mathrm{sign}(\dot{y})d| = |-(y_0 - 2d) + d| = |-(y_0 - 3d)| = y_0 - 3d$ ：振幅

$\beta_1 = 0$ ：初期位相

初期位置からさらに半周期 $\omega t + \beta = 360°$ 振れた点の位置は次のようになる。

$y_2 = A_1 - \mathrm{sign}(\dot{y})d = A_1 - d = y_0 - 4d$

ここで折り返すと最初の単振動と同様に、速度が負で正の動摩擦力が作用し、振動中心が正方向に移動した3回目の半周期の単振動が開始される。

$y = A_2 \cos \omega t - \mathrm{sign}(\dot{y})d$：変位

$A_2 = |y_2 + \mathrm{sign}(\dot{y})d| = |y_0 - 4d - d| = y_0 - 5d$:振幅

$\beta_2 = 0$:初期位相

このように、単振動は半周期毎に振幅が不連続に2dずつ減少することになる。この様相は全体的に見ると減衰振動となっている。

上記をまとめると、

$A_n = y_0 - (2n + 1)d$:振幅

$y = A_n \cos \omega t - \mathrm{sign}(\dot{y})d$：変位

$\dot{y} = -A_n \omega \sin \omega t$ ：速度

$\ddot{y} = -A_n \omega^2 \cos \omega t$ ：加速度

ここで、$n = \mathrm{int}\left\{\dfrac{(\omega t + \beta)}{\pi}\right\}$:与えられた実数を越えない最大の整数

折返し点では一瞬、おもりが静止するので、摩擦力は動摩擦力から静止摩擦力に変化する。再び動き始めるには、弾性力が最大静止摩擦力を越える必要がある。上の式を見れば分かるように、半周期毎に振幅が $2\mu' \frac{mg}{k}$ づつ小さくなり、終いには弾性力が最大静止摩擦力を越えられず静止することになる。

$y_L \le \mu \dfrac{mg}{k}$:弾性力が最大静止摩擦力以下となる自然長からの変位（バネの伸縮長）

μ :静止摩擦係数

ここで、単振動の折返し点の位置と振幅の関係が次のように表されるので、これを上記に代入して、

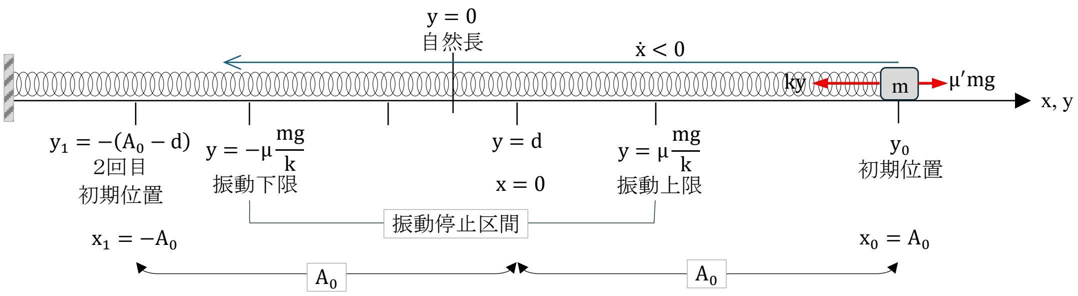
$y_L = A_L - \mu' \dfrac{mg}{k}$:単振動の折返し点の位置と振幅の関係

$A_L - \mu' \dfrac{mg}{k} \le \mu \dfrac{mg}{k}$

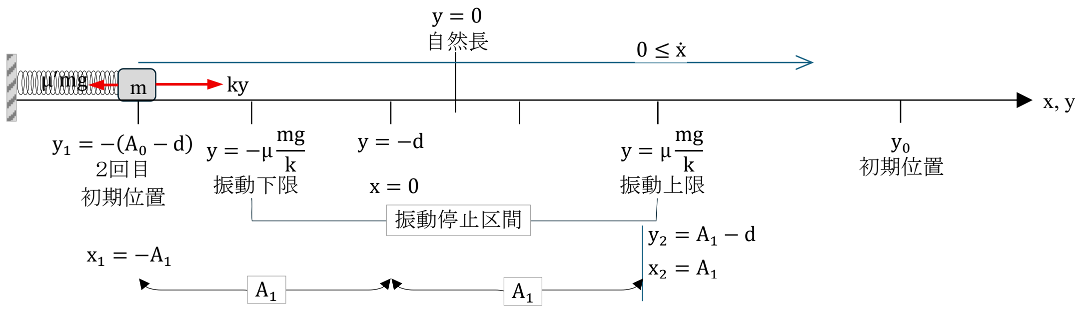
$A_L \le \mu \dfrac{mg}{k} + \mu' \dfrac{mg}{k}$

$A_L \le (\mu + \mu') \dfrac{mg}{k}$:弾性力が最大静止摩擦力以下となる振幅の範囲･････････････････････････(3-11)

半周期毎の単振動の折返し点のうち、始点より終点の方が自然長からの変位（伸縮長）が小さく、弾性力が小さくなるので、振幅が初めて上記の範囲になった単振動の終点で静止する。



(a)速度が負



(b)速度が正

図3-1　摩擦力が作用する単振動

4 減衰振動

粘性抵抗が作用する振動系は次のように表される。

$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$:減衰振動の運動方程式・・(4-1)

x :自然長(振動中心)からの変位(バネの伸縮長) [m]

m :おもりの質量 [kg]

c :粘性減衰係数 [Ns/m]

k :バネ定数 [N/m]

これを変形して、

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$:減衰振動の微分方程式・・・・・(4-2)

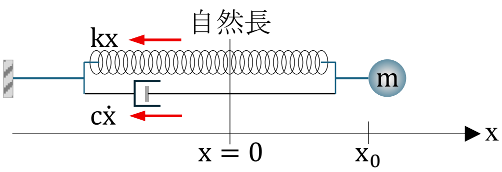


図4.1　減衰振動

補足6.2(1)項に示したように解いて、

$x = Ae^{-\gamma t}\cos\{\omega_d t + \beta\}$:変位・・・(4-3)

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:固有角振動数 [rad/s]・・(4-4)

$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$:減衰固有角振動数 [rad/s]・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(4-5)

$\zeta = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{\sqrt{4km}}$:減衰比 [ND]・・・(4-6)

$\gamma = \zeta\omega = \frac{c}{2m}$:減衰率 [1/s]・・(4-7)

$$A=\frac{\sqrt{\{(\omega x_0)^2+2\gamma x_0\dot{x}_0+\dot{x}_0{}^2\}}}{\omega_d}$$ ：初期振幅 [m]……(4-8)

$$\beta=\tan^{-1}\left\{\frac{-(\gamma x_0+\dot{x}_0)}{x_0\omega_d}\right\}$$ ：初期位相 [rad]……(4-9)

x_0 ：初期変位

$\dot{x}_0$ ：初期速度

5 強制振動

減衰振動の系に外力を加えて強制的に振動させる。

$m\ddot{x}=-c\dot{x}-kx+F\sin\Omega t$ ：強制振動の運動方程式……(5-1)

x ：自然長（振動中心）からの変位（バネの伸縮長） [m]

m ：おもりの質量 [kg]

c ：粘性減衰係数 [Ns/m]

k ：バネ定数 [N/m]

F ：外力 [N]

Ω ：外力角振動数 [rad/s]

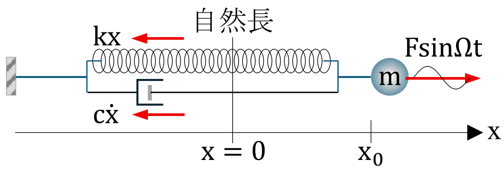


図5-1 強制振動

強制振動の運動方程式は減衰振動の項を左辺に、強制振動項を右辺に、下記のような微分方程式で表現される。

$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2x=\frac{F}{m}\sin\Omega t$ ：強制振動の微分方程式……(5-2)

この形式は定数係数2階線形非同次微分方程式とよばれ、特殊解が一つ求まると（x_2とする）、右辺をゼロと置いた同次微分方程式の一般解（x_1とする）を加えた解が式(5-2)の一般解となる。

$x=x_1+x_2$ ：式(5-2)の一般解

これらは減衰振動の過渡的なふるまいをする解と、それが静定した後でも残る定常的な強制振動の解を合わせたものとなる。

x_1 ：過渡的な減衰振動の解

x_2 ：定常的な強制振動の解

減衰振動の解は4項に示した通りである。

強制振動の解は外力の形より、次のように推定される。

$$x_2=A_2\sin(\Omega t+\alpha)$$

これを微分して、

$$\dot{x}_2=A_2\Omega\cos(\Omega t+\alpha)$$

$$\ddot{x}_2=-A_2\Omega^2\sin(\Omega t+\alpha)$$

これらを微分方程式に代入して整理すると、

$$-A_2\Omega^2\sin(\Omega t+\alpha)+2\gamma A_2\Omega\cos(\Omega t+\alpha)+\omega^2A_2\sin(\Omega t+\alpha)=\frac{F}{m}\sin\Omega t$$

$$A_2(\omega^2-\Omega^2)\sin(\Omega t+\alpha)+2A_2\gamma\Omega\cos(\Omega t+\alpha)=\frac{F}{m}\sin\Omega t$$

$$A_2(\omega^2-\Omega^2)(\sin\Omega t\cos\alpha+\cos\Omega t\sin\alpha)+2A_2\gamma\Omega(\cos\Omega t\cos\alpha-\sin\Omega t\sin\alpha)=\frac{F}{m}\sin\Omega t$$

$$\{A_2(\omega^2-\Omega^2)\cos\alpha-2A_2\gamma\Omega\sin\alpha\}\sin\Omega t+\{A_2(\omega^2-\Omega^2)\sin\alpha+2A_2\gamma\Omega\cos\alpha\}\cos\Omega t=\frac{F}{m}\sin\Omega t$$

上の式が成り立つには下記が成立しなければならない。

$$A_2(\omega^2-\Omega^2)\cos\alpha-2A_2\gamma\Omega\sin\alpha=\frac{F}{m}\cdots\cdots(5\text{-}3)$$

$$A_2(\omega^2-\Omega^2)\sin\alpha+2A_2\gamma\Omega\cos\alpha=0\cdots\cdots(5\text{-}4)$$

上の2式から未定定数A_2とαを決定するため、両式の両辺をそれぞれ2乗して加算すると、

$$A_2{}^2(\omega^2-\Omega^2)^2\cos^2\alpha-4A_2{}^2\gamma\Omega(\omega^2-\Omega^2)\cos\alpha\sin\alpha+4A_2{}^2(\gamma\Omega)^2\sin^2\alpha$$
$$+A_2{}^2(\omega^2-\Omega^2)^2\sin^2\alpha+4A_2{}^2\gamma\Omega(\omega^2-\Omega^2)\sin\alpha\cos\alpha+4A_2{}^2(\gamma\Omega)^2\cos^2\alpha=\left(\frac{F}{m}\right)^2$$

$$\left\{A_2{}^2(\omega^2-\Omega^2)^2+4A_2{}^2(\gamma\Omega)^2\right\}\cos^2\alpha+\left\{A_2{}^2(\omega^2-\Omega^2)^2+4A_2{}^2(\gamma\Omega)^2\right\}\sin^2\alpha=\left(\frac{F}{m}\right)^2$$

$$\left\{A_2{}^2(\omega^2-\Omega^2)^2+4A_2{}^2(\gamma\Omega)^2\right\}=\left(\frac{F}{m}\right)^2$$

$$A_2=\frac{F}{m\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+4(\gamma\Omega)^2}}$$:強制振動項の振幅$\cdots\cdots(5\text{-}5)$

さらに式(5-4)より、

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-2\gamma\Omega}{\omega^2-\Omega^2}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{-2\gamma\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\right)$$:強制振動項の初期位相$\cdots\cdots(5\text{-}6)$

減衰振動項は$\zeta^2-1<0$の一般解である式(4-3)とする。

$$x_1=A_1e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\beta)$$

これに強制振動項の特殊解を合わせて、

$$x=A_1e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\beta)+A_2\sin(\Omega t+\alpha)$$:強制振動の一般解$\cdots\cdots(5\text{-}7)$

これを微分して未定定数A_1とβを求める。

$$\dot{x}=-A_1\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\beta)-A_1\omega_d e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t+\beta)+A_2\Omega\cos(\Omega t+\alpha)$$

変位xと速度$\dot{x}$に$t=0$の初期値を代入して、

$x_0=A_1\cos\beta+A_2\sin\alpha$:初期変位

$\dot{x}_0=-A_1\gamma\cos\beta-A_1\omega_d\sin\beta+A_2\Omega\cos\alpha$:初期速度

上式より、

$$A_1\cos\beta=x_0-A_2\sin\alpha$$

$$\dot{x}_0=-\gamma(x_0-A_2\sin\alpha)-A_1\omega_d\sin\beta+A_2\Omega\cos\alpha=-\gamma x_0-A_1\omega_d\sin\beta+A_2(\gamma\sin\alpha+\Omega\cos\alpha)$$

$$A_1\sin\beta=\frac{A_2(\gamma\sin\alpha+\Omega\cos\alpha)-\gamma x_0-\dot{x}_0}{\omega_d}$$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より、

$$A_1{}^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\left\{\frac{A_2(\gamma\sin\alpha+\Omega\cos\alpha)-\gamma x_0-\dot{x}_0}{\omega_d}\right\}^2+(x_0-A_2\sin\alpha)^2$$

$$A_1=\sqrt{\left[\left\{\frac{A_2(\gamma\sin\alpha+\Omega\cos\alpha)-\gamma x_0-\dot{x}_0}{\omega_d}\right\}^2+(x_0-A_2\sin\alpha)^2\right]}$$:減衰振動項の振幅$\cdots\cdots(5\text{-}8)$

$$\beta=\tan^{-1}\left\{\frac{A_2(\gamma\sin\alpha+\Omega\cos\alpha)-\gamma x_0-\dot{x}_0}{\omega_d(x_0-A_2\sin\alpha)}\right\}$$:減衰振動項の初期位相$\cdots\cdots(5\text{-}9)$

6 補足

6.1 単振動の微分方程式の解法

単振動の運動方程式は「定数係数線形二階同次微分方程式」と呼ばれる微分方程式で表される。

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$:単振動の微分方程式……………………………………………………(6.1-1)

x :自然長(振動中心)からの変位(バネの伸縮長) [m]

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:固有角振動数 [rad/s]……………………………………………………(6.1- 2)

この解を次のように仮定して微分し、

$x = e^{\lambda t}$……………………………………………………………………………(6.1-3)

$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

これを元の微分方程式に代入して、

$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$:微分方程式の特性方程式……………………………………………(6.1-4)

特性方程式を解いて、

$\lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega\sqrt{-1} = \pm i\omega$…………………………………………………(6.1-5)

i :虚数単位

従って、2つの虚数解が得られ、一般解が次のように表される。

$\lambda_1 = i\omega$

$\lambda_2 = -i\omega$

$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$= A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$ ………………………………………………………(6.1-6)

オイラーの公式 $e^{i\lambda t} = \cos\lambda t + i\sin\lambda t$ を用いて、

$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = A_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + A_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

$= (A_1 + A_2)\cos\omega t + (A_1 - A_2)i\sin\omega t$

これに三角関数の合成公式を適用して、

$x = \{(A_1 + A_2)^2 + (A_1 - A_2)^2 i^2\}\cos(\omega t + \beta)$

ここで、未定定数A_1およびA_2は任意なので$\{(A_1 + A_2)^2 + (A_1 - A_2)^2 i^2\} = A$と置き換えると、

$x = A\cos(\omega t + \beta)$:単振動の一般解…………………………………………………(6.1-7)

A :振幅

β :初期位相

次に未定定数を決定して特殊解を求めるため、x を微分して、

$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \beta)$:速度

変位xと速度$\dot{x}$に$t = 0$の初期値を代入して、

$x_0 = A\cos\beta$:初期変位

$\dot{x}_0 = -A\omega \sin\beta$ ：初期速度

上式より、

$\cos\beta = \dfrac{x_0}{A}$

$\sin\beta = -\dfrac{\dot{x}_0}{A\omega}$

$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ より、

$\left(\dfrac{x_0}{A}\right)^2 + \left(-\dfrac{\dot{x}_0}{A\omega}\right)^2 = 1$

$A = \sqrt{\left\{ {x_0}^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 \right\}}$ ：振幅･･(6.1- 8)

$\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{-\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ ：初期位相･･(6.1- 9)

6.2 減衰振動の微分方程式の解法

バネ･マス･ダンパで構成された振動系は、以下に示した定数係数2階線形非同次微分方程式で表される。

$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$ ：減衰振動の運動方程式（定数係数2階線形非同次微分方程式）･････････(6.2-1)

x ：自然長（振動中心）からの変位（バネの伸縮長） [m]

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ：固有角振動数 [rad/s]･･･(6.2- 2)

$\zeta = \dfrac{c}{2m\omega} = \dfrac{c}{2m}\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{c}{\sqrt{4km}}$ ：減衰比 [ND]･･(6.2- 3)

m ：おもりの質量 [kg]

k ：バネ定数 [N/m]

c ：粘性減衰係数 [Ns/m]

この解を次のように仮定して微分し、

$x = Ae^{\lambda t}$･･(6.2-4)

$\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t} = \lambda Ax$

$\ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t} = \lambda^2 Ax$

これを元の微分方程式に代入して、

$\lambda^2 Ax + 2\zeta\omega\lambda Ax + \omega^2 Ax = 0$

$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0$ ：微分方程式の特性方程式･･(6.2-5)

特性方程式を解いて、

$\lambda = \dfrac{1}{2}\left(-2\zeta\omega \pm \sqrt{4\zeta^2\omega^2 - 4\omega^2}\right) = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$\lambda_1 = -\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$\lambda_2 = -\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$\quad = A_1 e^{-\left(\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + A_2 e^{-\left(\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$

$\quad = e^{-\zeta\omega t}\left(A_1 e^{\omega\sqrt{\zeta^2-1}t} + A_2 e^{-\omega\sqrt{\zeta^2-1}t}\right)$ ･･(6.2- 6)

この解は判別式(ζ^2-1)の値に応じて次のように分けられる。

$\zeta^2-1<0$ ：不足減衰（減衰振動）

$\zeta^2-1=0$ ：臨界減衰

$\zeta^2-1>0$ ：過減衰

6.2.1 減衰振動［$\zeta^2-1<0$］

２つの虚数解を持つので $\sqrt{\zeta^2-1}=i\sqrt{1-\zeta^2}$ と置き換えて、一般解は次のように表される。振幅が指数関数的に減少しながら振動する運動となる。

$$\mathrm{x}=\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\left(\mathrm{A}_1\mathrm{e}^{i\omega\sqrt{1-\zeta^2}t}+\mathrm{A}_2\mathrm{e}^{-i\omega\sqrt{1-\zeta^2}t}\right)$$

オイラーの公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}=\cos\lambda t+\mathrm{i}\sin\lambda t$ を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}&=\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\left[\mathrm{A}_1\left\{\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)+i\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right\}+\mathrm{A}_2\left\{\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)-i\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right\}\right]\\&=\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\left\{(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)+(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)i\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right\}\end{aligned}$$

これに三角関数の合成公式を適用して、

$$\mathrm{x}=\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\{(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)^2+(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)^2i^2\}\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta\right)$$

ここで、未定定数A_1およびA_2は任意なので$\{(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)^2+(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)^2i^2\}=\mathrm{A}$と置き換えると、

$\mathrm{x}=\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta\right)$ ：減衰振動の一般解

A ：初期振幅

β ：初期位相

次に未定定数を決定して特殊解を求めるため、x を微分して、

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{x}}&=-\zeta\omega\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\cos\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta\right)-\omega\sqrt{1-\zeta^2}\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta\right)\\&=-\zeta\omega\mathrm{x}-\mathrm{A}\omega\sqrt{1-\zeta^2}\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\sin\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta\right)\end{aligned}$$ ：速度

変位xと速度$\dot{\mathrm{x}}$に$t=0$の初期値を代入して、

$\mathrm{x}_0=\mathrm{A}\cos\beta$ ：初期変位

$\dot{\mathrm{x}}_0=-\zeta\omega\mathrm{x}_0-\mathrm{A}\omega\sqrt{1-\zeta^2}\sin\beta$ ：初期速度

上式より、

$$\cos\beta=\frac{\mathrm{x}_0}{\mathrm{A}}$$

$$\sin\beta=-\frac{\zeta\omega\mathrm{x}_0+\dot{\mathrm{x}}_0}{\mathrm{A}\omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より、

$$\left(\frac{\zeta\omega\mathrm{x}_0+\dot{\mathrm{x}}_0}{\mathrm{A}\omega\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{x}_0}{\mathrm{A}}\right)^2=1$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^2&=\left(\frac{\zeta\omega\mathrm{x}_0+\dot{\mathrm{x}}_0}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2+{\mathrm{x}_0}^2\\&=\frac{\omega^2(1-\zeta^2){\mathrm{x}_0}^2+(\zeta\omega\mathrm{x}_0+\dot{\mathrm{x}}_0)^2}{\omega^2(1-\zeta^2)}\\&=\frac{\omega^2{\mathrm{x}_0}^2-\zeta^2\omega^2{\mathrm{x}_0}^2+\zeta^2\omega^2{\mathrm{x}_0}^2+2\zeta\omega\mathrm{x}_0\dot{\mathrm{x}}_0+{\dot{\mathrm{x}}_0}^2}{\omega^2(1-\zeta^2)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega^2 {x_0}^2 + 2\zeta\omega x_0 \dot{x}_0 + {\dot{x}_0}^2}{\omega^2(1-\zeta^2)}$$

$$= \frac{1}{1-\zeta^2}\left\{{x_0}^2 + 2\zeta\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)x_0 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2\right\}$$

$$A = \sqrt{\frac{\omega^2 {x_0}^2 + 2\zeta\omega x_0 \dot{x}_0 + {\dot{x}_0}^2}{\omega^2(1-\zeta^2)}}$$ ：初期振幅

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\dfrac{\zeta\omega x_0 + \dot{x}_0}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}}{x_0}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{-(\zeta\omega x_0 + \dot{x}_0)}{x_0\omega\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}$$ ：初期位相

ここで下記のように置き換えて、

$\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ ：減衰固有角振動数 [rad/s]

$\gamma = \zeta\omega = \dfrac{c}{2m}$ ：減衰率 [1/s]

$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \beta)$ ：減衰振動の一般解･･(6.2- 7)

$A = \dfrac{\sqrt{\left\{(\omega x_0)^2 + 2\gamma x_0 \dot{x}_0 + {\dot{x}_0}^2\right\}}}{\omega_d}$ ：初期振幅･･･(6.2- 8)

$\beta = \tan^{-1}\left\{\dfrac{-(\gamma x_0 + \dot{x}_0)}{x_0\omega_d}\right\}$ ：初期位相･･･(6.2- 9)

6.2.2 臨界減衰[$\zeta^2 - 1 = 0$]

$\zeta = 1$ で重解を持ち、一般解は次のように表される。

$\lambda = -\zeta\omega = -\omega$

$x = Ae^{-\omega t}$

2次方程式なのに解が一つしか得られないので、未定定数 A を関数と見なして「定数変化法」という手法を用いて次のように表す。

$x = A_{(t)}e^{-\omega t}$

これを微分して、

$\dot{x} = \dot{A}_{(t)}e^{-\omega t} - \omega A_{(t)}e^{-\omega t}$ ：速度

$\ddot{x} = \ddot{A}_{(t)}e^{-\omega t} - \omega\dot{A}_{(t)}e^{-\omega t} - \omega\dot{A}_{(t)}e^{-\omega t} + \omega^2 A_{(t)}e^{-\omega t}$

$\quad = \ddot{A}_{(t)}e^{-\omega t} - 2\omega\dot{A}_{(t)}e^{-\omega t} + \omega^2 A_{(t)}e^{-\omega t}$ ：加速度

これらを元の微分方程式に代入し、$\zeta = 1$であることに注意して、

$\ddot{A}_{(t)}e^{-\omega t} - 2\omega\dot{A}_{(t)}e^{-\omega t} + \omega^2 A_{(t)}e^{-\omega t} + 2\zeta\omega\dot{A}_{(t)}e^{-\omega t} - 2\zeta\omega^2 A_{(t)}e^{-\omega t} + \omega^2 A_{(t)}e^{-\omega t} = 0$

$\ddot{A}_{(t)} + 2\omega(\zeta - 1)\dot{A}_{(t)} - 2\omega^2(\zeta - 1)A_{(t)} = 0$

$\ddot{A}_{(t)} = 0$

これを2回積分して、

$A_{(t)} = A_1 + A_2 t$

$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega t}$ ：臨界減衰の一般解･･(6.2-10)

未定定数を決定して特殊解を求めるため、x を微分して、

$\dot{x} = A_2 e^{-\omega t} - (A_1 + A_2 t)\omega e^{-\omega t}$ ：速度

変位xと速度$\dot{x}$に$t = 0$の初期値を代入して、

$x_0 = A_1$ ：初期変位

$\dot{x}_0 = A_2 - A_1\omega$ ：初期速度

$A_1 = x_0$ ：振幅1･･(6.2-11)

$A_2 = \omega x_0 + \dot{x}_0$ ：振幅2･･･(6.2-12)

6.2.3 過減衰$[\zeta^2 - 1 > 0]$

２つの実数解を持ち、一般解は次のように表される。

$\lambda_1 = -\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$\lambda_2 = -\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$= A_1 e^{-\left(\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + A_2 e^{-\left(\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$ ：過減衰の一般解･･････････････････････････････(6.2-13)

未定定数を決定して特殊解を求めるため、x を微分して、

$\dot{x} = -\left(\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) A_1 e^{-\left(\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} - \left(\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) A_2 e^{-\left(\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$

変位xと速度$\dot{x}$に$t = 0$の初期値を代入して、

$x_0 = A_1 + A_2$ ：初期変位

$\dot{x}_0 = -(\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})A_1 - (\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})A_2$ ：初期速度

$A_1 = \dfrac{1}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)x_0 + \dot{x}_0\right\}$ ：振幅1･･････････････････････････････････････(6.2-14)

$A_2 = \dfrac{1}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)x_0 - \dot{x}_0\right\}$ ：振幅2･･････････････････････････････････････(6.2-15)

過減衰は双曲線関数を用いて表すこともできる。

$x = e^{-\zeta\omega t}\left(A_1 e^{\omega\sqrt{\zeta^2-1}t} + A_2 e^{-\omega\sqrt{\zeta^2-1}t}\right)$

この式のカッコ内を双曲線関数の公式を用いて表す。

$A_1\cosh(t) = A_1 \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$A_2\sinh(t) = A_2 \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

上式にそれぞれA_2およびA_1を乗じて加算および減算すると、

$A_1A_2\cosh(t) + A_1A_2\sinh(t) = A_1A_2\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} + A_1A_2\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = A_1A_2e^t$

$A_1A_2\cosh(t) - A_1A_2\sinh(t) = A_1A_2\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} - A_1A_2\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = A_1A_2e^{-t}$

上式を整理して、

$A_1\cosh(t) + A_1\sinh(t) = A_1e^t$

$A_2\cosh(t) - A_2\sinh(t) = A_2e^{-t}$

$A_1e^t + A_2e^{-t} = A_1\cosh(t) + A_1\sinh(t) + A_2\cosh(t) - A_2\sinh(t)$

$= (A_1 + A_2)\cosh(t) + (A_1 - A_2)\sinh(t)$

よって、上記 x の一般解は次のように表され、双曲線関数が指数関数的に減少する運動となり、振動しない。

$$x = e^{-\zeta\omega t}\left\{(A_1 + A_2)\cosh\left(\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t\right) + (A_1 - A_2)\sinh\left(\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t\right)\right\}$$ ：過減衰の一般解・・・・（6.2- 16）

次に未定定数を決定して特殊解を求めるため、x を微分して、

$$\dot{x} = -\zeta\omega e^{-\zeta\omega t}\left\{(A_1 + A_2)\cosh\left(\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t\right) + (A_1 - A_2)\sinh\left(\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t\right)\right\}$$
$$+\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}e^{-\zeta\omega t}\left\{(A_1 + A_2)\sinh\left(\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t\right) + (A_1 - A_2)\cosh\left(\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t\right)\right\}$$

上記 x と $\dot{x}$ に t=0 の初期値を代入して、

$x_0 = (A_1 + A_2)$ ；初期変位

$\dot{x}_0 = -\zeta\omega(A_1 + A_2) + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}(A_1 - A_2)$ ：初期速度

$$A_1 = \frac{1}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)x_0 + \dot{x}_0\right\}$$ ：振幅1・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・（6.2- 17）

$$A_2 = \frac{1}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left\{\left(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)x_0 - \dot{x}_0\right\}$$ ：振幅2・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・（6.2- 18）

これら振幅は双曲線関数を用いない解の式（6.2‐14）と式（6.2-15）と同じである。